الجمهورية العربية السورية

وزارة التعليم العالي

جامعة تشرين

كلية العلوم

تعميم المشتقات من المرتبة الثانية لدوال محدبة

في فضاءات باناخ

Generalized second order derivatives of convex functions

in a Banach spaces

دراسة أعدت لنيل درجة الماجستير في الرياضيات (التحليل الرياضي)

تقديم

فادي محمد برهوم

إشراف

الأستاذ المساعد الدكتور

محمد سويقات

الفهرس

الفصل الأول

بعض المفاهيم الأساسية في التحليل فوق البياني

الفصل الثاني

المشتقات من المرتبة الأولى وفق سلايس في فضاءات منظمة

المحتوى **رقم الصفحة**

الفصل الثالث

المشتقات من المرتبة الثانية وفق سلايس في فضاءات منظمة

الفصل الرابع

مشتقات المؤثرات المتعددة القيم

المحتوى	رقم الصفحة

الفصل الخامس

بعض التطبيقات على الأبحاث السابقة

ملخص

درس الرياضي روكافيلر [11] المشتقات فوق البيانية من المرتبة الأولى في فضاءات منتهية البعد لدوال ذات قيم غير منتهية مستخدماً مفهوم التقارب فوق البيان , ثم تمت دراستها من قبل دو [7] , كومينتي [6] في فضاءات باناخ انعكاسية مستخدمين مفهوم التقارب لموسكو . كما درست من قبل الدكتور محمد سويقات في فضاءات باناخ باستخدام مسافة هاوسدورف[16] . أما عملنا فسيكون تعميم هذه المشتقات إلى فضاءات خطية منظمة أو إلى فضاءات باناخ باستخدام مفهوم جديد للتقارب يسمى تقارب سلايس الذي يتطابق مع مفهوم التقارب فوق البيان إذا كان الفضاء منتهي البعد , ويتطابق مع تقارب موسكو إذا كان الفضاء فضاء باناخ انعكاسي ويعود هذا المفهوم إلى الرياضي ببير [4].

سوف نحصل على نتائج جديدة متعلقة بالمشتق فوق البياني من المرتبتين الأولى والثانية لدالة محدبة , وسوف نقدم بعض النتائج التي تخدم نظرية الأمثليات , أيضاً سنبين أن مرافق المشتق من المرتبة الثانية لدالة محدبة وفق سلايس (وفق تقارب سلايس) يساوي المشتق من المرتبة الثانية لمرافق تلك الدالة .
كما سنبين أن صف الدوال القابلة للاشتقاق وفق سلايس يحوي صف الدوال القابلة للاشتقاق وفق فريشيه , وسنبين أيضاً العلاقة بين مشتق سلايس من المرتبة الثانية لدالة محدبة f وبين بروتو قابلية اشتقاق المؤثر تحت التفاضلي ∂f مع

$$\partial\left(f''_{x,z}\right) = (\partial f)'_{x,z}$$

أخيراً سنقدم بعض التطبيقات على النتائج التي توصلنا إليها والمرتبطة بنظرية القيمة الصغرى .

مقدمة:

يعد التحليل الدالي عموماً والتحليل المحدب خصوصاً من أكثر فروع الرياضيات التي بدأت تتطور في الآونة الأخيرة تطوراً سريعاً وذلك لما له من إمكانيات واسعة للتطبيق في علوم أخرى .

وقد كان للتحليل المحدب الذي يرتبط بالدرجة الأولى بأسماء كل من الرياضيين روكافلر ومورو الفضل الكبير في ظهور نظريات متعددة لدراسة وتعميم المشتقات من المرتبة الأولى والثانية لدوال محدبة و التي كان لها الدور الأهم في توسيع دراسة مسائل الأمثليات حيث توجد أعمال كثيرة في هذا المجال نذكر منها : [1.2.3.6.7] وقد درست الحالة غير المحدبة من قبل العديد من الرياضيين سواء كان من الناحية النظرية أو التطبيقية, ونشير هنا إلى أن التقارب البسيط بقي يشغل الدور الأساس في معظم الأعمال السابقة والتي كانت في معظمها تدرس دوالاً ذوات قيم منتهية .

و ظهرت حديثاً طريقة جديدة من قبل الرياضي روكافلر لدراسة المشتقات في فضاءات منتهية البعد حيث استبدل التقارب البسيط بمفهوم جديد يدعى التقارب فوق البيان الذي يعتمد على دراسة الدالة $f: E \rightarrow \overline{R}$ من خلال خواص فوق بيانها :

$$epi f = \{ (x,\alpha) \in E \times R \; / \; f(x) \leq \alpha \}$$

الذي أدى إلى خلق مفاهيم جديدة في التحليل المحدب مثل التفاضل فوق البيان, المشتق فوق البيان, التقارب فوق البيان, التكامل فوق البيان, المسافة فوق البيان ....للخ واعتُمدت هذه الطريقة من قبل عدد من الرياضيين لدراسة مسائل الأصغريات حتى أصبح يطلق عليه اسم التحليل فوق البياني .

كما استخدم روكافيلر مفهوم تقارب كوراتوسكي القوي في دراسة برو تو مشتق للمؤثرات المتعددة القيم حيث تمت دراسته السابقة في فضاءات منتهية البعد.وقد قدم في دراسته العديد من التطبيقات وخاصةً في دراسة مسائل الأصغريات , كما قدم دراسة تتعلق بالمشتق فوق البيان للمسالة المركبة (composite problems) من النوع ; $g \circ F$ وهي من أهم المسائل وأحدثها بصفتها المفتاح الأساس لكثير من مسائل الأمثليات والبرمجة الخطية .

وقد كان لأعمال الرياضي موسكو الفضل الكبير الذي أدى إلى ظهور مفهوم آخر للتقارب وهو مفهوم تقارب- موسكو وذلك في الفضاءات الانعكاسيةو الذي يتعلقبالتقارب القو ي والضعيف على الفضاء والذي يتطابق مع مفهوم التقارب فوق البيان إذا كان الفضاء المدروس منتهي البعد, وقد قدم هذا التقارب نتائج مهمة وعديدة لم يستطع مفهو م التقارب فوق البيان أن يقدمها وذلك عندما يكون الفضاء المدروس انعكاسياً ,

وباستخدام هذا التقارب فقد عمم بعض الرياضيين أمثال (دو [7]), (كومينتي [6]) دراسة روكافيلر السابقة على فضاءات باناخ انعكاسية ,

لكن هذا التقارب لموسكو يغدو ضعيفاً عندما لا يكون الفضاء انعكاسياً , لذلك فإن الكثير من الرياضيين أمثال أتوش , بير....اهتموا بإيجاد مفهوم آخر يعطي نتائج مهمة حتى ولو كان الفضاء المدروس منظماً عاماً , و بحيث يتطابق هذا التقارب مع تقارب موسكو إذا كان الفضاء منظماً انعكاسياً . ونتيجةً لتلك الأعمال فقد ظهر في بداية التسعينات من القرن الماضيمفهوم " جديد" للتقارب يدعى بتقارب سلايس ....[5],[4],[3], الذي يتوافق بشكل طبيعي لدراسة مسائل الأمثليات في فضاءات منظمة عامة ويتطابق مع مفهوم موسكو في فضاءات باناخ انعكاسية, ويتطابق مع مفهوم فوق البيان في فضاءات منتهية البعد .

سوف نقوم نحن بتعميم بعض النتائج المتعلقة بالمشتقات فوق البيانية والتي درست من قبل روكافيلر ودو إلى فضاءات عامة منظمة باستخدام تقارب سلايس .

يهدف بحثنا هذا إلى:

1) دراسة المشتق فوق البياني من المرتبتين الأولى والثانية وفق سلايس لدالة محدبة ونصف مستمرة من الأدنى وفعليةو التعرف على بعض خواصه والعلاقة بين قابلية دالة f للاشتقاق وفق سلايس وقابلية اشتقاق مرافقتها f^* .

2) دراسة بروتو مشتق للمؤثرات المتعددة القيم وبيان العلاقة بين قابلية دالة f محدبة ونصف مستمرة من الأدنى وفعلية للاشتقاق وفق سلايس وقابلية بروتو للمؤثر تحت التفاضل ∂f للاشتقاق .

3) العلاقة بين أكثر المشتقات أهمية (مشتق فريشيه) من المرتبتين الأولى والثانية ومشتق سلايس من المرتبتين الأولى والثانية.

4) تقديم بعض التطبيقات لدراستنا والتي تخدم نظرية الأمثلياتوخاصةً فيما يتعلق بدالة موريو يوشيدا.

يتضمن عملنا هذا مقدمة و خمسة فصول وقائمة بالمراجع العلمية :

نقوم في الفصل الأول بإعطاء بعض عناصر التحليل فوق البيان . بدايةً نعطي تعريف المجموعات المحدبة والدوال المحدبة وعدداً من الخواص المتعلقة بالتحدب , ومن ثم ندرس الدوال نصف المستمرة من الأدنى ومن الأعلى و الدوال المرافقة و بعض خواصها , ثم نقوم بإعطاء مفهوم فوق البيان لدالة ما و نبين الدور الهندسي الذي يلعبه فوق البيان لدالة في دراسة خواص تلك الدالة , ثم نعطي مفهومي مشتق كاتو و فريشيه

وتحت التفاضل لدالة ما وبعض الخواص المتعلقة بهم والعلاقة بين كل من أحدهم مع الآخر, ثم نناقش مفهوم التقارب فوق البيان لمتتالية من الدوال في فضاءات تبولوجية عامة , ثم نعرف تقارب موسكو لمتتالية من الدوال والذي يقدم نتائج مهمة في فضاءات باناخ انعكاسية والذي يسمح بدراسة تقارب متتالية من الدوال المحدبة و نصف المستمرة من الأدنى والفعلية بدلالة تقارب متتالية الدوال المرافقة لحدود متتالية الدوال السابقة . ثم نعرف تقارب سلايس في فضاء خطي منظم ونبين تكافؤه مع تقارب موسكو في فضاءات باناخ الانعكاسية ونبين خواصه ونقدم بعض المبرهنات المتعلقة به والتي ستخدم بحثنا .

ونشير هنا إلى أن نظرية فوق البيان قد استخدمت من قبل العديد من الرياضيين في دراسة العديد من المسائل نذكر منهم حسب مجالات اهتماماتهم :

في تطوير النظرية :

$$.........Volle\,,Attouch\ and\ Wets\,,Degiorgi\,,Rockafellar$$

وفي الميكانيك: $.........Bouttazzo\,,Attouch$

وفي الحلول المثلى : $.........Co\min etti\,,Attouch\,,Mosco\,,Beer$

في تقارب المجموعات : $.........,Wijsman\,,Mosco\,,Beer\,,Wets\,.$

في الفصل الثاني سنقوم بدراسة المشتق وفق سلايس من المرتبة الأولى لدالة محدبة ونصف مستمرة من الأدنى وفعلية حيث سنعرفه ونعطي بعض خواصه ونقدم مبرهنات تخدم نظرية الأمثليات ومن ثم نبين العلاقة بين المشتق وفق سلايس لدالة f وتحت تفاضلها ∂f كما سنبين أن صف الدوال القابلة للاشتقاق وفق سلايس يحوي صف الدوال القابلة للاشتقاق وفق فريشيه كما وسنبين في المبرهنة 2.9 أن المشتق من المرتبة الأولى وفق سلايس f'_x يعطى بالعلاقة:

$$f'_x(\xi)=\max\left\{\langle z,\xi\rangle,\quad \forall z\in\partial f(x)\right\}$$

في الفصل الثالث سندرس المشتق وفق سلايس من المرتبة الثانية لدالة f محدبة ونصف مستمرة من الأدنى و فعلية في نقطة x بالنسبة إلى دالة خطية مستمرة z حيث سنعرفه ونعطي بعض خواصه وسنبين علاقته بمشتق فريشيه من المرتبة الثانية . كما سنبين في النظرية 3.8 أن f قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الثانية في نقطة x من E بالنسبة إلى z إذا وفقط إذا كانت f^* (الدالة المرافقة للدالة f) قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الثانية في z بالنسبة إلى x وأن :

$$(f''_{x,z})^* = (f^*)''_{z,x}$$

كما سندرس في الفصلين الثاني والثالث قابلية اشتقاق وفق سلايس من المرتبتين الأولى والثانية للمسألة التي تأخذ الشكل $f \circ A$ حيث A مؤثر خطي إيزومورفيزم و f دالة قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الأولى و الثانية في نقطة x بالنسبة إلى z , ونبين في المبرهنة 2.10 أن :

$$\left(f \circ A\right)'_x\left(\xi\right) = f'_{Ax}\left(A\xi\right) = \left(f'_{Ax} \circ A\right)\left(\xi\right)$$

وفي المبرهنة 3.10 نبين أن :

$$\left(f \circ A\right)''_{x,A^*z}\left(\xi\right) = f''_{Ax,z}\left(A\xi\right)$$

في الفصل الرابع سندرس بروتو مشتق لمؤثر ما متعدد القيم وسنبين العلاقة بين قابلية اشتقاقه وقابلية اشتقاق مؤثره العكسي و سنبين في النظرية 4.6 أن f قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق سلايس في x بالنسبة إلى z إذا وفقط إذا كان ∂f بروتو قابل للاشتقاق في x بالنسبة إلى z ونبرهن أن :

$$\partial\left(f''_{x,z}\right) = (\partial f)'_{x,z}$$

في الفصل الخامس سنقوم بدراسة بعض التطبيقات لنتائجنا السابقة حيث ندرس قابلية الاشتقاق وفق سلايس من المرتبتين الأولى والثانية لمجموع دالتين $f + g$ حيث f دالة قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبتين الأولى والثانية و g قابلة للاشتقاق وفق فريشيه من المرتبتين الأولى والثانية . هذه المناقشة تستخدم في دراسة المسألة:

$$Minimize\left\{(g + \delta_C)(x) : x \in E\right\}$$

حيث أن $[\ (\delta_C)(x) = 0$ من أجل كل $x \in C$ و $(\delta_C)(x) = +\infty\ ]$ فيما عدا ذلك ,و حيث C مجموعة غير خالية محدبة ومغلقة في فضاء خطي منظم E .

كما سنعرف دالة موريو يوشيدا (f^λ) لدالة f والدليل $\lambda > 0$:

$$f^\lambda(x) = \inf_{u \in E}\left\{f(u) + \frac{1}{2\lambda}\|u - x\|^2\right\}, (x \epsilon E), \forall \lambda > 0$$

في المبرهنة 5.10 نبين في فضاء هلبرت $\boldsymbol{H}$ ((حيث من أجل كل $\lambda > 0$ ومن أجل كل x من $\boldsymbol{H}$ فإن $f^\lambda(x)$ يبلغ حده الأدنى في نقطة سنرمز لها بالرمز $j_\lambda^f(x)$)) أن f قابلة للاشتقاق وفق سلايس في $j_\lambda^f(x)$ إذا وفقط إذا كانت دالة موريو يوسيدا f^λ قابلة للاشتقاق وفق سلايس في x بالنسبة إلى z مع :

$$(f^\lambda)''_{x,z} = (f''_{u,z})^\lambda$$

ونبين في المبرهنة 5.11 أن المؤثر j_λ^f بروتو قابل للاشتقاق في x بالنسبة إلى $u = j_\lambda^f(x)$ و بروتو مشتقه يعطى بالعلاقة :

$$\left(j_\lambda^f\right)'_{x,u}(\xi) = arg\ \min_{\eta \in H}\{\, f''_{u,z}(\eta) + \frac{1}{2\lambda}\|\xi - \eta\|^2 \,\}$$

وأن $\left(j_\lambda^f\right)'_{x,u}$مؤثر مستمر و متجانس إيجابياً من المرتبة الثانية .

وسنقدم أيضاً مبرهنة تتعلق بمؤثر الإسقاط (المبرهنة 5.16) مستفيدين من النتائج التي حصلنا عليها في دراستنا السابقة .

الفصل الأول

بعض المفاهيم الأساسية في التحليل فوق البياني
About some elements of epi graphical analysis

نبدأ بتذكرة بعض التعاريف والمفاهيم التي تستخدم كعناصر مشتركة بين التحليل المحدب ونظرية الأمثليات ومن أجل تفاصيل أكثر يمكن العودة إلى...[10],[9],[2],[1].

سنعتبر كل الفضاءات المستخدمة في دراستنا معرفة فوق حقل الأعداد الحقيقية . كما سنعتبر أن E فضاءً خطياً مظماً ,و أن A مجموعة جزئية فيه و أن $f: E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ دالة ما .

1- المجموعات المحدبة و الدوال المحدبة [9]

<u>تعريف1.1:</u> المجموعة المحدبة (Convex Set)

نقول إن A مجموعة محدبة إذا كان انتماء كل من x , y إلى A وكل t من $[0,1]$ يؤدي إلى أن:

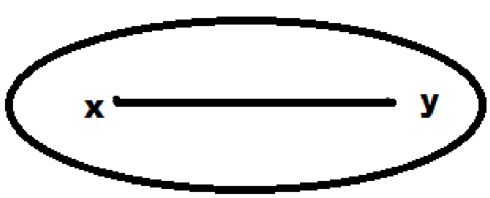
$$tx + (1-t)y \in A$$

هندسياً نقول إن A محدبة إذا كانت أي قطعة مستقيمة واصلة بين أي نقطتين من A تقع بشكل كامل ضمن A .

من الواضح أن أي فضاء متجهي هو مجموعة محدبة , وأن المجموعة الخالية هي مجموعة محدبة , الكرات المفتوحة والمغلقة في الفضاءات المنظمة هي مجموعة محدبة .



مجموعة غير محدبة



مجموعة محدبة

<u>تعريف 1.2 :</u> الدالة المحدبة (Convex Function)

نقول إن f دالة محدبة إذا وفقط إذا كان من أجل كل x, y من E وكل t من $[0,1]$ أن:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

من الواضح أن أي دالة خطية هي دالة محدبة .

ملاحظة :

إذا كانت f دالة معرفة على مجموعة جزئية A من E وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ فإننا نستطيع أن نمددها بدالة أخرى $\hat{f}$ معرفة على كامل الفضاء E بالشكل :

$$\hat{f}(x)=\begin{cases} f(x) & ; x\in A \\ \infty & ; x\notin A \end{cases}$$

إن $\hat{f}$ محدبة إذا وفقط إذا كانت f محدبة و A محدبة .

مبرهنة 1.3:

لتكن $f_1, f_2, f: E \rightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ عندئذ:

1) إذا كانت كل من f_1, f_2 محدبة فإن f_1+f_2 دالة محدبة.

2) إذا كانت f دالة محدبة و $\alpha\in\mathbb{R}^+$ فإن αf دالة محدبة.

3) إذا كانت $\{x_1,x_2,.......x_n\}\subset E$ وكانت $\{\alpha_1,\alpha_2,.......\alpha_n\}$ أعداداً حقيقيةً موجبةً بحيث أن: $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ عندئذ فإن:

$$f(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i)\le\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)$$

إثبات :

إن برهان 1), 2) هوأمر و اضح أما برهان 3) فيتم بالاستقراء الرياضي كما يلي:

من أجل $n=2$ فالعلاقة السابقة صحيحة من تعريف التحدب لدالة .

نفرض أن العلاقة صحيحة من أجل $n-1$ ولنبرهن صحتها من أجل n , ومن أجل ذلك لنفرض أن

$$\beta=\alpha_1+\alpha_2+.......+\alpha_{n-1}$$

ومنه $\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\alpha_i}{\beta}=1$ ولنعتبر أن : $y=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\alpha_i}{\beta}x_i$

عندئذ فإن:

$$f(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\alpha_i}{\beta}x_i)\le\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\alpha_i}{\beta}f(x_i)$$

كما سيكون:

$$f(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i)=f(\beta y+\alpha_n x_n)\le\beta f(y)+\alpha_n f(x_n)\le$$

$$\beta\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\alpha_i}{\beta}f(x_i)+\alpha_n f(x_n)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)$$

وهو المطلوب. ■

مبرهنة 1.4:

إذا كانت $(f_{i;\, i\in I})$ أسرة من الدوال المحدبة فإن $sup_{i\in I}\{f_i\}$ دالة محدبة , حيث أن :

$$(sup_{i\in I}\{f_i\})(x) = sup_{i\in I}\{f_i(x)\}$$

إثبات :

مهما يكن t من $[0,1]$ ومهما يكن x, y من E فإن :

$$(sup_{i\in I}\{f_i\})(tx+(1-t)y) = sup_{i\in I}\{f_i(tx+(1-t)y)\}$$

$$\le sup_{i\in I}\{tf_i(x)+(1-t)f_i(y)\} \le tsup_{i\in I}\{f_i(x)\}+(1-t)sup_{i\in I}\{f_i(y)\}$$

$$= t(sup_{i\in I}\{f_i\})(x)+(1-t)(sup_{i\in I}\{f_i\})(y)$$

الأمر الذي يؤدي مباشرةً إلى أن الدالة $sup_{i\in I}\{f_i\}$.

2- الدوال نصف المستمرة من الأدنى (*Lower semi continuous functions*) [3]

تعريف 1.5:

نقول إن f دالة نصف مستمرة من الأدنى في نقطة x من E إذا كان من أجل كل متتالية (x_n) من نقاط E ومتقاربة من النقطة x أن:

$$f(x) \le \lim_{n\to\infty}\inf f(x_n)$$

إذا كانت f نصف مستمرة من الأدنى في كل نقطة x من E قلنا أن f نصف مستمرة من الأدنى على E وعندئذ سنقول إن f هي دالة lse.

مبرهنة 1.6:[2]

(1) إذا كانت $f_1, f_2, f: E \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ دوالاً كل منها نصف مستمرة من الأدنى فإن: f_1+f_2 دالة نصف مستمرة من الأدنى , αf دالة نصف مستمرة من الأدنى حيث $\alpha > 0,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

(2) إذا كانت $\{f_i : i\in I\}$ عائلة من الدوال نصف المستمرة من الأدنى فإن $sup_{i\in I}\{f_i\}$ دالة نصف مستمرة من الأدنى.

تعريف 1.7:

نقول إن f دالة نصف مستمرة من الأدنى بضعف في نقطة x من E إذا وفقط إذا كان من أجل كل متتالية (x_n) من نقاط E متقاربة بضعف من النقطة x أن:

$$f(x) \le \lim_{n\to\infty}\inf f(x_n)$$

حيث أننا نقول عن متتالية (x_n) من نقاط E أنها متقاربة بضعف من نقطة x من E إذا وفقط إذا كان من أجل كل دالي مستمر وخطي $\langle z, .\rangle$ معرف على E أن: $\langle z, x\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle z, x_n\rangle$.

ملاحظة:

سنرمز بالرمز E^* لمجموعة الدوال الخطية والمستمرة z والمعرفة على E .

تعريف 1.8:

نقول إن f دالة نصف مستمرة من الأعلى في نقطة x من E إذا وفقط إذا كان من أجل كل متتالية (x_n) من نقاط E متقاربة من النقطة x أن:

$$f(x) \geq \lim_{n\to\infty} \sup f(x_n)$$

واضح أن أي دالة f تكون مستمرة في نقطة x من E إذا وفقط إذا كانت f نصف مستمر من الأدنى ومن الأعلى في آن واحد في x . وأن f تكون نصف مستمرة من الأعلى في نقطة x من E إذا وفقط إذا كانت الدالة $(-f)$ نصف مستمر ة من الأدنى في x.

تعريف 1.9:

نقول إن f دالة نصف مستمرة من الأعلى بضعف في نقطة x من E إذا كان من أجل كل متتالية (x_n) من نقاط E متقاربة بضعف من النقطة x أن:

$$f(x) \geq \lim_{n\to\infty} \sup f(x_n)$$

تعريف 1.10:

نقول عن دالة g معرفة على E^* (الفضاء المكون من كل الدوال الخطية والمستمرة والمعرفة على E) أنها نصف مستمرة من الأدنى بضعف * في نقطة z من E^* إذا وفقط إذا كان من أجل كل متتالية (z_n) من نقاط E^* المتقاربة بضعف * من النقطة z أن:

$$g(z) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \ g(x_n)$$

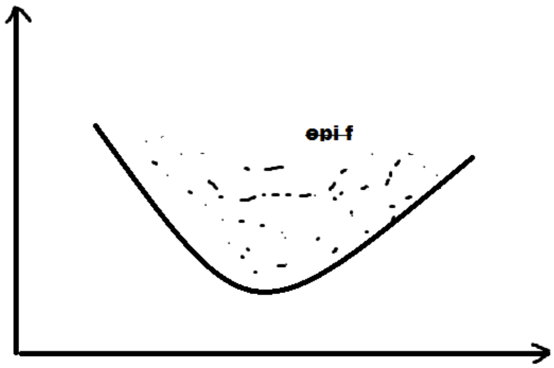
حيث أننا نقول عن متتالية (z_n) من نقاط E^* إنها متقاربة بضعف * من نقطة z من E^* إذا وفقط إذا كان: $\langle z, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle z_n, x\rangle$ وذلك من أجل كل نقطة x من E .

- نقول إن f دالة فعلية إذا كان $dom(f) = \{x \in E \, ; f(x) < +\infty\} \neq \emptyset$.

تعريف 1.11: [9]

لتكن $f: E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ نعرف فوق البيان لدالة f ونرمز له بالرمز: $epi \, f$ بأنه مجموعة النقاط :

$$epi \, f = \{(x, \propto) \in E \times \mathbb{R}; f(x) \leq \propto\}$$



المبرهنة الآتية ستبين أنه يمكن دراسة دالة من خلال دراسة فوق بيانها:

مبرهنة 1.12: [9]

(أ) f محدبة إذا وفقط إذا كان فوق بيانها مجموعة محدبة.

(ب) f نصف مستمرة من الأدنى إذا وفقط إذا كان فوق بيانها مجموعة مغلقة.

(ج) f فعلية إذا وفقط إذا كان فوق بيانها مجموعة غير خالية.

(د) f نصف مستمرة من الأدنى بضعف إذا وفقط إذا كان فوق بيانها مجموعة مغلقة بضعف. علماً أننا نقول عن مجموعة A إنها مغلقة بضعف إذا كان من أجل كل متتالية من نقاط A متقاربة بضعف أن نقطة التقارب تنتمي إلى A.

مبرهنة 1.13: [9]

ليكن E فضاءً خطياً منظماً ما عندئذ تكون كل مجموعة مغلقة ومحدبة في E هي مجموعة مغلقة بضعف.

مبرهنة 1.14:

ليكن E فضاءً خطياً منظماً ما ولتكن f دالة محدبة ونصف مستمرة من الأدنى عندئذ تكون f نصف مستمرة من الأدنى بضعف.

إثبات :

بما أن f دالة محدبة ونصف مستمرة من الأدنى فإنه بحسب المبرهنة 1.12 فإن فوق بيانها مجموعة محدبة ومغلقة , وبالتالي فإن فوق بيانها مجموعة مغلقة بضعف وذلك حسب المبرهنة 1.13 وبالتالي فإنه باستخدام المبرهنة 1.12(د)مرةً أخرى فإن f نصف مستمرة من الأدنى بضعف . ■

3- مشتق كاتو ومشتق فريشيه والمؤثر تحت التفاضل

تعتبر هذه المفاهيم من أكثر المفاهيم المتعلقة بالاشتقاق أهمية وذلك لما لها من دور مهم في نظرية الأمثليات , هذه المفاهيم اعتمدت في تعريفها على التقارب النقطي , ومن أجل تفاصيل أكثر يمكن الاطلاع على ....[9],[10] .

ليكن F, E فضائين خطيين منظمين كيفيين وليكن $f: E \to F$ مؤثراً ما , سوف نعرض التعريفات الآتية:

تعريف 1.15: مشتق كاتو (Gateaux derivatives) : [9]

لتكن x نقطة من E , إذا كان من أجل كل ξ من E يوجد مؤثر خطي ومستمر $f'(x): E \to F$ بحيث أن:

$$f'(x)(\xi) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t\xi) - f(x)}{t}$$

عندئذ سنقول إن f قابل للاشتقاق وفق كاتو وسندعو $f'(x)$ بمشتق كاتو للتطبيق f في النقطة x .

بعض الأحيان قد لا يقدم مشتق كاتو أفكاراً مفيدة في ما يتعلق بمسائل الأمثليات , لذلك تم وضع مشتق أكثر قوة منه وهو مشتق فريشيه .

تعريف 1.16: مشتق فريشيه (Frechet derivatives) : [10]

لتكن x نقطة من E نقول إن f قابل للاشتقاق وفقفر يشيه في x إذا كان يوجد مؤثر خطي ومستمر معرف على E ويأخذ قيمه في F (وسنرمز له بالرمز: $Df(x)$) بحيث أنه من أجل كل $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ يكون:

$\| f(x+\xi) - f(x) - Df(x)(\xi) \| \leq \varepsilon \| \xi \|$ وذلك من أجل كل $\| \xi \| < \delta$.

في الحقيقة هناك تعريف آخر مكافئ للتعريف السابق وهو كالتالي [9]:

لتكن x نقطة من E نقول أن f قابل للاشتقاق وفق فريشيه في x إذا كان يوجد تطبيق خطي ومستمر: $Df(x): E \to F$ ويحقق الخاصية التالية:

$$\lim_{\|\xi\| \to 0} \frac{\| f(x+\xi) - f(x) - Df(x)(\xi) \|}{\|\xi\|} = 0 \quad , \forall \xi \in E/\{0\}$$

عندئذ فإن $Df(x)$ يسمى بمشتق فريشيه للدالة f في x .

طبعاً و بوساطة التعريف السابق نجد علاقة تايلور من المرتبة الأولى بالشكل:

$$f(x+\xi) = f(x) + Df(x)(\xi) + o(\| \xi \|)$$

حيث أن:

$$\lim_{\|\xi\| \to 0} \frac{o(\|\xi\|)}{\|\xi\|} = \lim_{\|\xi\| \to 0} \frac{\|f(x+\xi) - f(x) - Df(x)(\xi)\|}{\|\xi\|} = 0$$

مبرهنة 1.17:

إذا كان f قابلاً للاشتقاق وفق فريشيه في x عندئذ فإن f قابلاً للاشتقاق وفق كاتو في x والمشتقان متساويان.

إثبات :

بما أن f فريشيه تفاضلي في x عندئذ فإن:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\| f(x+t\xi)-f(x)-tDf(x)(\xi)\|}{t\|\xi\|}=0$$

وذلك مهما تكن $\xi\in E/\{0\}$, الأمر الذي يقتضي أن:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\| f(x+t\xi)-f(x)-tDf(x)(\xi)\| =0$$

وبالتالي فإن:

$$\left\| \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t\xi)-f(x)}{t}-Df(x)(\xi)\right\| =0$$

الأمرالذي سيؤدي مباشرةً إلى أن :

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t\xi)-f(x)}{t}=Df(x)(\xi)$$. وهو المطلوب ■

إن عكس المبرهنة السابقة غير صحيح بصورة عامة والمثال التالي يوضح ذلك :

في الفضاء $\ell^1=\ell^1(\mathbb{R})$ (فضاء كل المتتاليات (ξ_n) حيث أن: $\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|<\infty$) فإن الدالة f التي تساوي النظيم على ℓ^1 المعرف بالشكل: $\|\xi\|=\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|$ قابلة للاشتقاق وفق كاتو في كل نقطة $x=(x_n)$ من ℓ^1 حيث أن: $x_n\neq 0,\forall n\in\mathbb{N}$, ومشتق كاتو سيكون :

$$f'(x)\xi=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\operatorname{sgn}(x_n)$$

وغير قابل للاشتقاق وفق كاتو في النقاط $x=(x_n)$ حيث أن: $x_n=0$ من أجل أي من الأدلة n ولكن هذا النظيم غير قابل للاشتقاق وفق فريشيه في أية نقطة من نقاط ℓ^1 .

الحل:

لتكن $x=(x_n)$ إحدى نقاط ℓ^1 حيث أن: $x_n\neq 0,\forall n\in\mathbb{N}$ وليكن $\varepsilon>0$ عدداً حقيقياً ما, وليكن $\xi=(\xi_n)$ إحدى نقاط ℓ^1, عندئذ يوجد $n_0\in\mathbb{N}$ بحيث أن:

$$\sum_{n>n_0}^{\infty}|\xi_n|<\varepsilon/2$$

كما يوجد $\delta>0$ صغير بشكل كاف بحيث أنه إذا كانت $|t|<\delta$ كان:

$$\operatorname{sgn}(x_n + t\xi_n) = \operatorname{sgn}(x_n)$$

وذلك من أجل كل $1 \le n \le n_0$.

الآن سيكون لدينا:

$$\left|\frac{\|x+t\xi\|-\|x\|}{t} - \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \operatorname{sgn}(x_n)\right| \le$$

$$\left|\sum_{n=1}^{n_0} t^{-1}\left\{|x_n + t\xi_n| - |x_n| - t\xi_n \operatorname{sgn}(x_n)\right\}\right| + \left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} t^{-1}\left\{|x_n + t\xi_n| - |x_n| - t\xi_n \operatorname{sgn}(x_n)\right\}\right|$$

$$\le \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left\{\left|t^{-1}\right| \left|t\xi_n\right| + \left|t\xi_n \operatorname{sgn}(x_n)\right|\right\} \le 2\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |\xi_n| < \varepsilon$$

الأمر الذي يبين أن : $$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \operatorname{sgn}(x_n) = \lim_{t\to 0}\left|\frac{\|x+t\xi\|-\|x\|}{t}\right|$$

وبالتالي فإن مشتق كاتو للدالة $f(x) = \|x\|$ هو الدالة المعرفة بالشكل:

$$\xi \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \operatorname{sgn}(x_n)$$

من الواضح أن $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \operatorname{sgn}(x_n)$ متقاربة وذلك لأن كل متسلسلة متقاربة مطلقاً هي متسلسلة متقاربة , ومن الواضح أيضاً أن الدالة: $\xi \to \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \operatorname{sgn}(x_n)$ خطيةومستمر ة .

لنثبت الآن أن الدالة f السابقة غير قابلة للاشتقاق وفق كاتو في النقاط $x = (x_n)$ حيث أن $x_n = 0$ من أجل أي من الأدلة n , ومن أجل ذلك لنأخذ :

$\xi = (\delta_n) = (0,0,\dots\dots,1,0,0,\dots..)$ أي متتالية جميع حدودها أصفار باستثناء الحد ذي المرتبة n , وليكن $x = (x_n)$ حيث أن $x_n = 0$ في الحد ذي المرتبة n , عندئذ سنجد أن:

$$\|x + t\xi\| - \|x\| = |t|$$

الأمر الذي يعني مباشرةً أن f غير قابل للاشتقاق وفق كاتو في النقاط$x = (x_n)$ السابقة (t يمكنه أن يسعى نحو الصفر من اليمين أو من اليسار).

الآن بحسب المبرهنة 1.17 فإنه من الواضح أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق وفق فريشيه في أية نقطة من النقاط $x = (x_n)$ حيث أن $x_n = 0$ من أجل أي من الأدلة n , ولنبين أن f غير قابلة للاشتقاق وفق فريشيه في أي من النقاط $x = (x_n)$ حيث أن $x_n \ne 0\,,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

من أجل ذلك لنأخذ من أجل كل $\mathbb{N} \ni m \geq 1$ النقاط :

$$\xi^m = (0,0,\dots\dots,-2x_m, -2x_{m+1}, -2x_{m+2}, \dots\dots)$$

عندئذ فإن $0 \to \|\xi^m\|$ عندما $\infty \to m$, بحسب المبرهنة 1.17 فإن التابع المعرف بالشكل :

$$\xi \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \operatorname{sgn}(x_n)$$

هو المرشح الوحيد لمعرفة فيما إذا كانت f قابلة للاشتقاق وفق فريشيه, لكننا نلاحظ أن :

$$\left|\|x + \xi^m\| - \|x\| - \sum_{n=1}^{\infty} (\xi^m)_n \operatorname{sgn}(x_n)\right| = \left|\sum_{n\geq m}^{\infty} -2|x_n|\ \right| = \|\xi^m\|.$$

الأمر الذي يعني أن f غير قابلة للاشتقاق وفق فريشيه في أي من النقاط $x = (x_n)$ حيث إن $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, وبالنتيجة النهائية فإن f غير قابلة للاشتقاق وفق فريشيه في أية نقطة من نقاط ℓ^1.

<u>مبرهنة 1.18:</u>

لتكن $f: E \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق وفق فريشيه في نقطة x من E عندئذ فإن:

(1) f مستمر في x .

(2) إذا كان f محدباً فإن: $f(x+\xi) \geq f(x) + Df(x)(\xi)$.

<u>إثبات :</u>

(1) بما أن f دالة قابلة للاشتقاق وفق فريشيه في x فإنه: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ بحيث يكون:

$$|f(x+\xi) - f(x) - Df(x)(\xi)| \leq \varepsilon \| \xi \|$$

وذلك من أجل كل $\| \xi \| < \delta$.

وبما أن $Df(x)$ دالة خطية ومستمرة فهي محدودة, وبالتالي يوجد $\alpha > 0$ بحيث أن:

$$|Df(x)(\xi)| < \alpha \| \xi \|$$

الآن سيكون لدينا:

$$|f(x+\xi) - f(x)| = |f(x+\xi) - f(x) - Df(x)(\xi) + Df(x)(\xi)| \leq$$

$$|f(x+\xi) - f(x) - Df(x)(\xi)| + |Df(x)(\xi)|$$

$$\leq \varepsilon \parallel \xi \parallel + \alpha \parallel \xi \parallel = (\varepsilon + \alpha)\|\xi\|$$

الأمر الذي يعني استمرارية f .

(2) من أجل كل $t \in (0,1]$ نجد أن:

$$f(x + t\xi) = f(t(x + \xi) + (1 - t)x) < tf(x + \xi) + (1 - t)f(x)$$

وبالتالي فإن :

$$f(x + \xi) \geq f(x) + \frac{1}{t}(f(x + t\xi) - f(x))$$

وبمراعاة المبرهنة 1.17 فإن:

$f(x + \xi) \geq f(x) + Df(x)(\xi)$. وهو المطلوب ■

<u>نتيجة 1.19:</u>

إذا لم يكن fمستمراً في نقطة x_0 من E عندئذ فإن f غير قابلة للاشتقاق وفق فريشيه في x_0 .

قبل عرض المبرهنة التالية لا بد أن ننوه إلى أن الرمز $\nabla f(x_0)$ يشير إلى المصفوفة المكونة من سطر وحيد و n عمود والتي مركباتها هي المشتقات الجزئية للدالة f في النقطة x_0 .

<u>مبرهنة 1.20:</u> [9]

لتكن $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دالة محدبة ومستمرة عندئذ قابلية اشتقاق دالة f وفق فريشيه في نقطة x_0 تكافئ وجود المشتقات الجزئية للدالة f في x_0 : $\left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}\right)$ وسيكون :

$$Df(x_0)(\xi) = Df(x_0)\left(\sum_{i=0}^{n} \xi_i \, \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \xi_i \, Df(x_0)(\mathbf{e}_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \xi_i \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}\right) = \nabla f(x_0).\,\xi$$

حيث أن:

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\{f(x_0 + t\mathbf{e}_i) - f(x_0)\} = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}$$

($\mathbf{e}_i$ تشير إلى أشعة الواحدة في الفضاء $\mathbb{R}^n$).

<u>مبرهنة 1.21:</u> [9]

في الفضاءات المنتهية البعد تكون قابلية دالة للاشتقاق وفق كاتو تكافئ قابلية اشتقاقها وفق فريشيه .

<u>تعريف 1.22:</u>

ليكن E فضاءً خطياً منظماً ما ولتكن $f: E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ نعرف الدالة الملساء بأنها كل دالة من الشكل: $x \to \langle z, x \rangle + b : b \in \mathbb{R}, z \in E^*$

حيث يرمز $\langle z, x \rangle$ للثنا الخطية بين z و x أي $\langle z, x \rangle = z(x)$, وهذا فقط للدوال الخطية المستمرة z وعندئذ $\langle z, x \rangle$ سيكون خطياً من اليمين واليسار الأمر الذي يشابه ما نعرفه عن الجداء الداخلي .

تعريف 1.23: الدوال المرافقة (The conjugate functions)

نعرف مرافق دالة f ونرمز له بالرمز: f^* بأنه الدالة المعرفة على E^* بالشكل:

$$\forall z \in E^*: f^*(z) = sup_{x\in E}\{\langle z,x\rangle - f(x)\}$$

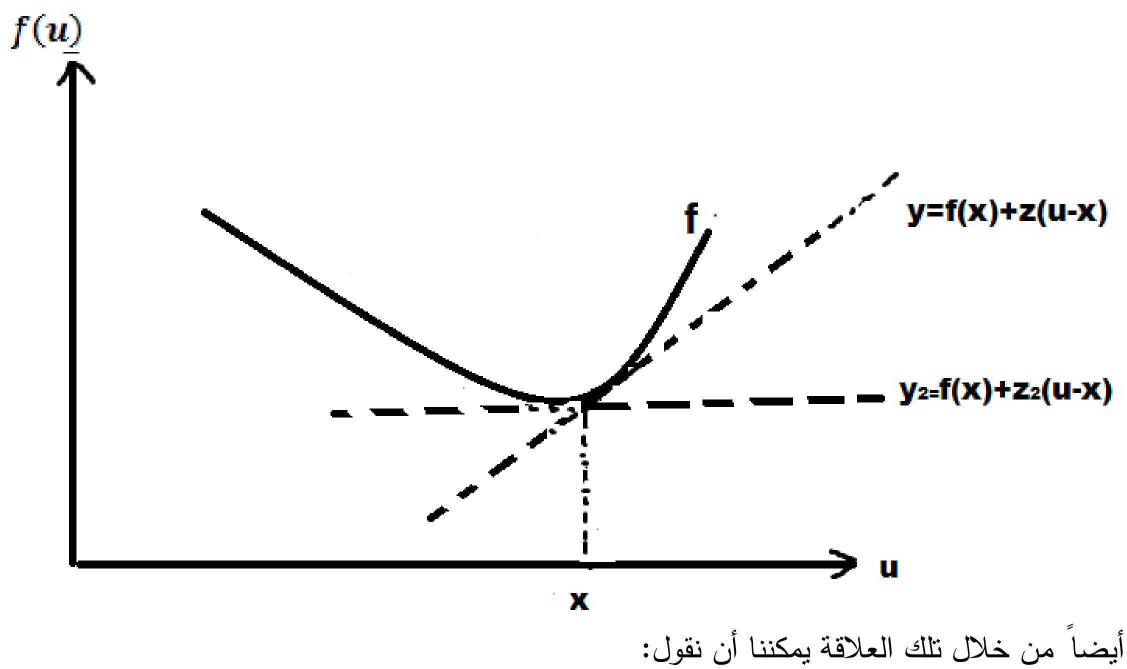
وقد برهن أن f^*دالة محدبة سواءً كانت f محدبة أم لم تكن محدبة .

تعريف1.24 تحت التفاضل لدالة (Subdifferential) [9]

نعرف المؤثر تحت التفاضل لدالة محدبة $f: E \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ في نقطة x من E حيث $(f(x) < +\infty)$ و يرمز له بالرمز ($\partial f(x)$) بالعلاقة:

$$\partial f(x) = \{z \in E^*; f(u) \geq f(x) + \langle z, u - x\rangle \ ;\forall u \in E\}$$

كما ويمكن من خلال العلاقة السابقة أن نقول إن $z \in \partial f(x)$ إذا وفقط إذا كانت الدالة الملساء $y = f(x) + \langle z, u - x\rangle$ تحد f من الأدنى .



أيضاً من خلال تلك العلاقة يمكننا أن نقول:

$$\partial f(x) = \{z \in E^*; f(x)+f^*(z) = \langle z, x\rangle\}$$

- نقول أن $x \in \partial f^*(z)$ إذا وفقط إذا كان $f^{**}(x)+f^*(z) - \langle z, x\rangle$

حيث أن f^{**} دالة معرفة على E بالشكل:

$$f^{**}(x) = sup_{z\in E^*}\{\langle z,x\rangle - f^*(z)\}$$

ويبرهن بسهولة أن $f^{**}(x) \leq f(x)\ ,\forall x \in E$.

ملاحظة:

لتكن f دالة محدبة وقابلة للاشتقاق وفق فريشيه في نقطة x , عندئذ فإن: $Df(x) \in \partial f(x)$
وذلك حسب المبرهنة 1.18.

مبرهنة 1.25:

من أجل أي دالة محدبة ومستمرة $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق وفق فريشيه في نقطة x فإن:

$$\partial f(x)= \{\nabla f(x)\}$$

إثبات :

لكون f دالة محدبة فإن:

$$f(\xi) - f(x) \geq \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\{f(x + t(\xi - x)) - f(x)\} = \nabla f(x)(\xi - x).$$

الأمر الذي يعني أن: $\nabla f(x) \in \partial f(x)$.

من جهة أخرى فإنه من أجل أي متجه كيفي $\{ v: v \in \partial f(x) \}$ و من أجل كل متجهات الواحدة $e_1,\ldots\ldots e_n \in \mathbb{R}^n$ سنجد أن:

$$f(x+te_i) - f(x) \geq \langle v, te_i\rangle$$

ومنه :

$$v_i \leq \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\{f(x+te_i) - f(x)\} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$
$$v_i \geq \lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t}\{f(x+te_i) - f(x)\} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

الأمر الذي ينتج عنه أن $v = \nabla f(x)$ وبالتالي فإن $\partial f(x)= \{\nabla f(x)\}$. ■

تعريف 1.26:

سنرمز بالرمز: $\Gamma(E)$ لمجموعة الدوال المحدبة ونصف المستمرة من الأدنى والخاصة المعرفة على E .

سنرمز بالرمز $\Gamma^*(E^*)$ لمجموعة الدوال المحدبة ونصف المستمرة من الأدنى بضعف * والخاصة والمعرفة على E^* وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

في الحقيقة , لقد بين الرياضي روكافيلر أنه إذا كانت $f \in \Gamma(E)$ فإن $f^* \in \Gamma^*(E^*)$.

قبل عرض التعريف التالي لابد أن ننوه بما يلي :

نقول $f \leq g$ أن إذا كان $f(x) \leq g(x)$ وذلك مهما يكن $x \subset E$.

تعريف 1.27:

نعرف إغلاق دالة f ونرمز لها بالرمز : $cl(f)$ بالشكل :

$$cl(f) = sup\{g: E \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\} ; g \ \ is \ \ lse, g \leq f\}$$

مبرهنة 1.28:

إذا كانت $z \in E^*$ و $b \in \mathbb{R}$ فإن:

(أ) $\langle z, x\rangle + b \leq f(x) \Leftrightarrow f^*(z) \leq -b$

(ب) f^{**} هو الغلاف العلوي $S(E)$ لمجموعة الدوال الملساء التي تحد f من الأدنى , حيث أن :

$$S(E) = sup_{(z,b)\in E^*\times\mathbb{R}}\{\langle z, x\rangle + b\}$$

إثبات :

(أ) لتكن $\langle z, x\rangle + b$ دالة ملساء تحد f من الأدنى عندئذ :

$$f^*(z) \leq -b \Leftrightarrow \langle z, x\rangle - f(x) \leq -b \Leftrightarrow \langle z, x\rangle + b \leq f(x)$$

(ب) لدينا:

$$f^{**}(x) = (f^*)^*(x) = \sup_{z\in E^*}\{\langle z, x\rangle - f^*(z)\}$$

وبفرض $S(E)$ الغلاف العلوي للدوال الملساء المستمرة التي تحد f من الأدنى عندئذ:

$$S(E) = sup_{(z,b)\in E^*\times\mathbb{R}}\{\langle z, x\rangle + b\} = sup_{z\in E^*}\{sup_{b\in\mathbb{R}}\{\langle z, x\rangle + b\}\}$$

ولأن $\langle z, x\rangle + b$ دالة ملساء تحد f من الأدنى فإن $\langle z, x\rangle + b \leq f(x)$

وبالتالي فإن $f^*(z) \leq -b$ وبالتالي فإن $-f^*(z) \geq b$ ومنه :

$$\langle z, x\rangle + b \leq \langle z, x\rangle - f^*(z)$$

وبالتالي

$$S(E) \leq sup_{z\in E^*}\{\langle z, x\rangle - f^*(z)\} = f^{**}(x)$$

وبمراعاة أن $f^{**}(x) \leq f(x)$ نجد مباشرةً ما هو مطلوب . ■

و اعتماداً على المبرهنة السابقة سنجد المبرهنة التالية:

مبرهنة 1.29: [2]

إذا كانت $f \in \Gamma(E)$ فإن $f^{**} = cl(f) = f$, وعندئذ ستكون f هي الغلاف العلوي للدوال الملساء المستمرة التي تحد f من الأدنى .

مبرهنة 1.30 ($[9, p(224)]$) :

لتكن S,T مجموعتين محدبتين وغير خاليتين في فضاء تبولوجي متجهي وحقيقي E مع كون داخلية S و التي سنرمز لها بالرمز $\text{int}(S)$ لا تساوي الخالية, عندئذٍ سيكون $\text{int}(S)\cap T=\varnothing$ إذا وفقط إذا وجد دالي خطي ومستمر z مخالف للدالي الصفري وعدد حقيقي γ بحيث يكون $z(s)\le\gamma\le z(t)$ وذلك من أجل كل $s\in S$ وكل $t\in T$ مع $z(s)<\gamma$ وذلك مهما يكن $s\in \text{int}(S)$.

تعريف1.31:

لتكن $f:E\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ دالة ذات قيمة محدودة في x أحد نقاط E عندئذ:

- نقول إنه للدالة f قيمة محلية صغرى في x إذا كان يوجد $\propto>0$ بحيث أن: $f(\xi)\ge f(x)$ وذلك من أجل كل ξ من E الذي يحقق أن: $\|\xi-x\|\le\propto$.
- نقول إنه للدالة f قيمة صغرى في x إذا كان $f(\xi)\ge f(x)$ وذلك من أجل كل ξ من E .

مبرهنة 1.32: ([9 , p(13)])

لتكن $f:E\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ أحد الدوال المحدبة ولتكن x أحد نقاط E عندئذ إذا كان للدالة f قيمة محلية صغرى في x عندئذ فإنه للدالة f قيمة صغرى في x.

4- التقارب فوق البيان (Epi graphical convergence)

وهو مفهوم ظهر في الستينات من القرن الماضي , ومن أجل تفاصيل أكثر يمكن العودة إلى [1].

تعريف 1.33:

ليكن (E,τ) فضاءً تبولوجياً ما ولتكن A مجموعة جزئية في E ولتكن M أسرة جزئية ما من مجاورات المجموعة A , نقول إن M قاعدة لجملة مجاورات المجموعة A إذا كان من أجل كل مجاورة W للمجموعة A يوجد عنصر V من M بحيث يكون $A \subseteq V \subseteq W$.

تعريف 1.34:

نقول عن الفضاء التبولوجي (E,τ) إنه من النوع الأول إذا كان من أجل كل $x \in E$ فإن $A = \{x\}$ تملك قاعدة لجملة مجاوراتها على الأكثر قابلة للعد .

تعريف 1.35:

ليكن (E,τ) فضاءً تبولوجياً من النوع الأول ولتكن: $\{f_n, f: E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} : n \in \mathbb{N}\}$ متتالية من الدوال, تعرف النهاية الدنيا للمتتالية (f_n) وفق مفهوم فوق البيان في نقطة x ونرمز لها بالرمز $(\tau - \mathrm{li}_e f_n)(x)$ بالعلاقة:

$$(\tau - \mathrm{li}_e f_n)(x) = \min_{x_n \xrightarrow{\tau} x} \liminf_{n \to \infty} f_n(x_n) \qquad (1.1)$$

وتعرف النهاية العليا للمتتالية (f_n) وفق مفهوم فوق البيان في نقطة x ونرمز لها : $(\tau - \mathrm{ls}_e f_n)(x)$ بالعلاقة:

$$(\tau - \mathrm{ls}_e f_n)(x) = \min_{x_n \xrightarrow{\tau} x} \limsup_{n \to \infty} f_n(x_n) \qquad (1.2).$$

من الواضح أن:

$$.(\tau - \mathrm{ls}_e f_n)(x) \geq (\tau - \mathrm{li}_e f_n)(x)$$

و سنقول أن (f_n) تتقارب وفق مفهوم فوق البيان نحو f في x إذا وفقط إذا كان:

$$(\tau - \mathrm{ls}_e f_n)(x) = (\tau - \mathrm{li}_e f_n)(x) = f(x)$$

أو ما يكافئها :

$$(\tau - \mathrm{ls}_e f_n)(x) \leq f(x) \leq (\tau - \mathrm{li}_e f_n)(x)$$

إذا كانت العلاقة السابقة صحيحة من أجل كل x عندئذ سنقول إن (f_n) تتقارب وفق مفهوم فوق البيان نحو f وسنكتب: $f = \tau - \lim_e f_n$.

من العلاقة (1.1) نجد:

$$\forall\, x_n \xrightarrow{\tau} x : \left(\tau - \mathrm{li}_e f_n\right)(x) \le \lim_{n\to\infty} \inf\ f_n(x_n) \qquad (1.3)$$

و:

$$\exists\, x_n \xrightarrow{\tau} x\,;\ \left(\tau - \mathrm{li}_e f_n\right)(x) = \lim_{n\to\infty} \inf\ f_n(x_n)$$

ومن العلاقة(1.2) نجد:

$$\forall\, x_n \xrightarrow{\tau} x:\ \left(\tau - \mathrm{ls}_e f_n\right)(x) \le \lim_{n\to\infty} \sup\ f_n(x_n) \qquad (1.4)$$

و:

$$\exists x_n \xrightarrow{\tau} x;\ \left(\tau - \mathrm{ls}_e f_n\right)(x) = \lim_{n\to\infty} \sup\ f_n(x_n)$$

ومما تقدم يمكننا تعريف التقارب فوق البيان بالشكل التالي:

تعريف 1.36 :

نقول أن (f_n) تتقارب وفق مفهوم فوق البيان نحو f إذا وفقط إذا تحقق كل من الشرطين التاليين:

$$\forall x \in E, \forall x_n \xrightarrow{\tau} x: f(x) \le \lim_{n\to\infty} \inf\ f_n(x_n)$$

$$\forall x \in E, \exists\, x_n \xrightarrow{\tau} x: f(x) \ge \lim_{n\to\infty} \sup\ f_n(x_n)$$

العلاقة بين التقارب النقطي والتقارب فوق البيان :

إذا كانت f_n تتقارب تقارباً نقطياً من f فسيكون:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sup\ f_n(x_n) = \lim_{n\to\infty} \inf\ f_n(x_n)$$

وذلك من أجل كل x من E, وإذا كانت f_n تتقارب وفق مفهوم فوق البيان من دالة g فإنه من العلاقتين(1.3) , (1.4) سنجد أن: $g(x) \le f(x)$.

ويمكن أن نوضح ذلك من خلال المثال التالي:

بفرض $E = \mathbb{R}$ ولتكن $\{f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ معرفة كما يلي:

$$f_n(x) = \begin{cases} x & ; x \le 0, x \ge \frac{2}{n}. \\ -nx & ; 0 \le x \le \frac{1}{n}. \\ nx - 2 & ; \frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n} \end{cases}$$

نلاحظ أن : $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$ بينما $\tau - \lim_e f_n(0) = -1$ ومنه:

$$-1 = \tau - \lim_e f_n(0) \le \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$$

و يجدر بالذكر أنه إذا كانت إحدى النهايتين موجودة, فليس من الضروري أن تكون الأخرى موجودة أيضاً ولكن ثمة حالات يكون فيها المفهومان متطابقين ومنها تلك الحالة التي تكون فيها متتالية الدوال مطردة.

مبرهنة 1.37: (Salinetti-Wets, [1])

ليكن E فضاء منتهي البعد ولتكن $f, (f_n) \in \Gamma(E)$ عندئذ:

1) إذا كانت f_n تتقارب تقارباً نقطياً من f , وكان $aff\left(dom(f_n)\right) \subset aff\left(dom(f)\right)$ عندئذ فإن: $f = \tau - \lim_{e} f_n$.

2) إذا كانت $f = \tau - \lim_{e} f_n$ عندئذ فإن f_n ستتقارب تقارباً نقطياً من f في $int\left(dom(f)\right)$.

حيث أن:

$$dom(f) = \{x \in E : f(x) < +\infty\}$$

$aff\left(dom(f)\right)$: مجموعة كل الدوال الحقيقية المستمرة الملساء المعرفة على $dom(f)$.

$aff\left(dom(f_n)\right)$: مجموعة كل الدوال الحقيقية المستمرة الملساء المعرفة على $dom(f_n)$.

الآن سنقدم المبرهنتين التاليتين كمثلٍ على الدور الذي يلعبه التقارب فوق البيان في نظرية الأمثليات .

مبرهنة 1.38: [1]

ليكن (E,τ) فضاءً تبولوجياً من النوع الأول ولتكن $f, (f_n)$ متتالية من الدوال بحيث تكون المتتالية (f_n) متقاربة وفق مفهوم فوق البيان نحو f , ولتكن (x_n) متتالية متراصة في (E,τ) و (ε_n) متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة بحيث يكون

$$f_n(x_n) \geq sup_{x\in E}\{ f_n(x) - \varepsilon_n \}, \forall n \in \mathbb{N}, \varepsilon_n \to 0$$

عندئذ يكون : $\sup f_n \underset{n}{\to} \sup f$

وإذا كانت x_0 نهاية لمتتالية جزئية من (x_n) فإن x_0 تكون حلاً للمسألة $sup_{x\in E}\{f(x)\}$ أي أن:

$$f(x_0) = sup_{x\in E}\{f(x)\}$$

مبرهنة 1.39: [1]

ليكن (E,τ) فضاءً تبولوجياً من النوع الأول ولتكن $f, (f_n)$ متتالية من الدوال المحدبة عندئذ كل شرطين من الشروط الآتية يعطي الآخر :

(i) $f = \tau - \lim_{e}(f_n)$

(ii) $V(f) = \lim_n V(f_n)$

$(iii)\ \ \forall \varepsilon > 0\ ;\ \varepsilon - argmin\ f = \lim_n\ \ (\varepsilon - argmin\ f_n)$

حيث أن :

$$V(f) = inf_{x\in \mathcal{E}}\{f(x)\}$$
$$\varepsilon - argmin\ f = \left\{x \in E : f(x) \leq \sup\{V(f) + \varepsilon, -\tfrac{1}{\varepsilon}\right\}$$

5− تقارب كوراتوسكي للمجموعات *(Set convergense in Kuratowski sense)*

تعريف 1.40: [1]

ليكن (E,τ) فضاءً تبولوجياً ما, ولتكن $\{C_n, C : n \in \mathbb{N}\}$ متتالية من المجموعاتغير الخالية و الجزئية في E , نقول إن (C_n) تتقارب نحو C وفق مفهوم كوراتوسكي إذا تحققت العلاقة:

$$\tau - \lim_n sup\, C_n \subseteq C \subseteq \tau - \lim_n inf\, C_n$$

أو اختصاراً :

$$\tau - lsC_n \subseteq C \subseteq \tau - li\ C_n$$

حيث:

$$\tau - ls\ C_n = \{x \in E;\ \exists(n_k), \exists(x_k); \forall k \in \mathbb{N}, x_k \in C_{n_k}, x_k \xrightarrow{\tau} x\}$$
$$\tau - li\ C_n = \{x \in E;\ \exists(x_n); \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in C_n, x_n \xrightarrow{\tau} x\}$$

ونكتب اختصاراً : $C = \tau - \lim_n C_n$.

مبرهنة 1.41: [1]

ليكن (E,τ) فضاءً تبولوجياً من النوع الأول ولتكن $\{f_n, f : E \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\} : n \in \mathbb{N}\}$ متتالية من الدوال, عندئذ تكون المتتالية (f_n) متقاربة وفق مفهوم فوق البيان نحو f إذا وفقط إذا تقاربت متتالية المجموعات $(epi\ f_n)$ وفق مفهوم كوراتوسكي نحو $epi\ f$. وفي هذه الحالة تكون المساواة التالية محققة:

$$epi(\tau - \lim_e(f_n)) = \tau - \lim_n(epi(f_n)).$$

لقد عبرنا في المبرهنة السابقة عن التقارب فوق البيان لمتتالية من الدوال بدلالة تقارب متتالية المجموعات والتي هي فوق البيان الموافق لكل دالة من متتالية الدوال.

6− تقارب موسكو (Mosco –convergence) [1]

تعريف 1.42:

ليكن E فضاءً خطياً منظماً ما ولتكن: $\{f_n, f : E \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}, n \in \mathbb{N}\}$ متتالية من الدوال, نقول إن (f_n) متقاربة وفق موسكو نحو f (وسنرمز لذلك بالشكل: $f = \text{M-}\lim_n f_n$) إذا وفقط إذا تحقق الشرطان:

$$(i)\quad \forall x \in E, \forall x_n \xrightarrow{\omega} x : f(x) \leq \lim_{n\to\infty} \inf\ f_n(x_n)$$

$$(ii) \quad \forall x \in E, \exists\, x_n \xrightarrow{s} x : f(x) \geq \lim_{n\to\infty} \sup\ f_n(x_n)$$

حيث أن ω, s تشيران إلى التقارب القوي والضعيف على الترتيب.

تعريف 1.43: تقارب موسكو للمجموعات [7]

ليكن E فضاءً خطياً منظماً ولتكن $\{C_n, C : n \in \mathbb{N}\}$ متتالية من المجموعات غير الخالية والجزئية في E سنقول إن (C_n) تتقارب من C وفق مفهوم موسكو للمجموعات إذا وفقط إذا كان:

$$s\text{–}\lim_n sup\, C_n \subseteq C \subseteq \omega - \lim_n inf\, C_n$$

أو اختصاراً :

$$s - ls\, C_n \subseteq C \subseteq \omega - li\, C_n$$

حيث إن:

$$s - ls\, C_n - \{x \in E;\ \exists(n_k), \exists(x_k); \forall k \in \mathbb{N} : x_k \in C_{n_k}, x_k \xrightarrow{s} x\}$$

$$\omega - li\, C_n = \{x \in E;\ \exists(x_n); \forall n \in \mathbb{N} : x_n \in C_n, x_n \xrightarrow{\omega} x\}$$

ونكتب اختصاراً $C = \mathrm{M} - \lim_n C_n$.

في الحقيقة فإن تقارب موسكو لا يقدم نتائج مهمة إلا إذا كان الفضاء E فضاء باناخ انعكاسي (سنكتب اختصاراً فضاءً انعكاسياً) والدوال $f_n \in \Gamma(E)$, حيث أن الغاية من هذا التقارب أصلاً هو إيجاد تقارب يربط بين تقارب متتالية من الدوال وتقارب متتالية الدوال المرافقة (كل حد من المتتالية الثانية هو دالة مرافقة للحد نفسه من المتتالية الأولى) , وكما سنرى في مبرهنة قادمة فإن هذا التكافؤ لن يكون صحيحاً إلا إذا كان الفضاء E فضاء باناخ انعكاسياً .

مبرهنة 1.44:[1]

ليكن E فضاء باناخ انعكاسي ولتكن : f , (f_n) متتالية من دوال $\Gamma(E)$ عندئذ فإن مايلي صحيح:

(أ) (f_n) متقاربة وفق موسكو نحو f إذا وفقط إذا تقاربت متتالية المجموعات $(epi\, f_n)$ وفق مفهوم تقارب موسكو للمجموعات نحو $epi\, f$.

(ب) (f_n) متقاربة وفق موسكو نحو f إذا وفقط إذا تقاربت متتالية الدوال (f_n^*) نحو f^* .

(ج) $f = M - \lim_n f_n$ إذا وفقط إذا تحقق كل من الشرطين التاليين:

$$(i) \quad \partial f = \lim_n\ \partial(f_n)$$

$$(ii) \quad \exists(u,v) \in (\partial f), \exists(u_n, v_n) \in \partial(f_n) : (u_n, v_n) \to (u,v),\ f_n(u_n) \to f(u)$$

حيث أن:

$$.\ \partial f = \{(x,z) \in E \times E^*: \forall\, \xi \in E: f(\xi) \geq f(x) + \langle z, \xi - x\rangle\}$$

ملاحظة:

بما أن التقارب الضعيف يكافئ التقارب القوي في الفضاءات المنتهية البعد فإن تقارب موسكو يتطابق مع مفهوم التقارب فوق البيان على هذه الفضاءات.

تعريف 1.45 تقارب كوراتوسكي القوي: [7]

ليكن E فضاءً خطياً منظماً ولتكن $\{C_n, C: n \in \mathbb{N}\}$ متتالية من المجموعات المغلقة وغير الخالية والجزئية في E , نقول إن (C_n) تتقارب من C وفق مفهوم كوراتوسكي القوي إذا وفقط إذا كان:

$$s\text{–}\lim_n sup\, C_n \subseteq C \subseteq s - \lim_n inf\, C_n$$

أو اختصاراً :
$$s \quad ls\, C_n \subseteq C \subseteq s \quad li\, C_n$$

حيث إن:

$$s - ls\, C_n = \{x \in E;\ \exists(n_k), \exists(x_k); \forall k \in \mathbb{N}: x_k \in C_{n_k}, x_k \xrightarrow{s} x\}$$

$$s - li\, C_n = \{x \in E;\ \exists(x_n); \forall n \in \mathbb{N}: x_n \in C_n, x_n \xrightarrow{s} x\}$$

ونكتب اختصاراً
$$.\ C = \lim_n C_n$$

من جهة أخرى نقول إن أسرة المجموعات $\{C_t, ;\ t > 0\}$ تتقارب وفق مفهوم كوراتوسكي القوي من مجموعة C عندما $t \to 0$ إذا وفقط إذا تقاربت متتالية المجموعات (C_{t_n}) من C وذلك من أجل كل متتالية (t_n) من الأعداد الحقيقية الموجبة والمتقاربة من الصفر .

لقد برهن أن تقارب موسكو يفشل بإعطاء نتائج مهمة إذا كان الفضاء المدروس غير انعكاسي ,ونتيجةً لوجود العديد من الفضاءات المنظمة وغير الانعكاسية وذات الأهمية (والتي سنورد أمثلة عنها) كان عملنا باستخدام مفهوم جديد لتقارب على فضاءات باناخ وأحياناً على فضاءات منظمة عامة والذي يقدم نتائج ومبرهنات مهة على هذه الفضاءات ويتطابق مع تقار ب موسكو إذا كان الفضاء انعكاسياً (وسوف نبين هذا التطابق) , هذا المفهوم يسمى تقارب سلايس.

من الأمثلة المهمة على الفضاءات المنظمة غير الانعكاسية:

(1) ليكن E مجموعة كل الحدوديات التي نعتبرها دوال للمتغير t على مجال مغلق محدود J=[a,b] ولنعرف النظيم: $\| x \| = \max_{t\in J} |x(t)|$, إن $(E, \|.\|)$: غير تام وبالتالي غير انعكاسي (لأن كل فضاء انعكاسي هو فضاء تام) .

(2) ليكن E مجموعة كل الدوال الحقيقية المستمرة التي نعتبرها دوال للمتغير t على مجال مغلق محدود J=[a,b] ولنعرف النظيم: $\| x \| = \int_0^1 |x(t)|\,dt$, إن $(E, \|.\|)$: غير تام أيضاً وبالتالي غير انعكاسي.

(3) الفضاء ℓ^1 غير انعكاسي .

7- تقارب سلايس (slice convergence)

مفهوم سلايس للتقارب ظهر أوائل التسعينات على يدي الرياضيين (Attouch , Beer [3],[4],[5]).

ليكن E فضاءً خطياً منظماً ما سنرمز بالرمز $C(E)$ لمجموعة كل المجموعات غير الخالية والمحدبة والمغلقة والجزئية في E .

<u>تعريف 1.46:</u>

نقول عن مجموعة K محتواة في E أنها متراصة بضعف إذا وفقط إذا كان من أجل كل متتالية من نقاطها يوجد متتالية جزئية منها متقاربة بضعف من نقطة من K .

<u>تعريف1.47:</u> تقارب سلايس للمجموعات: [4]

لتكن $\{A_n, A : n \in \mathbb{N}\}$ متتالية مجموعات من $C(E)$ نقول إن A_n تتقارب من A وفق سلايس إذا وفقط إذا كان:

$$D(A,B) = \lim_{n\to\infty} D(A_n, B)$$

وذلك من أجل كل مجموعة B مغلقة ومحدودة ومحدبة وجزئية في E , حيث أن:

$$D(A,B) = \inf\{\| a - b \| : a \in A, b \in B\}$$

ولقد بين (Beer) أن A_n تتقارب من A وفق موسكو إذا وفقط إذا كان :

$$D(A,K) = \lim_{n\to\infty} D(A_n, K)$$

وذلك من أجل كل مجموعة K متراصة بضعف ومحدبة وجزئية في E.

ولكون كل مجموعة مغلقة ومحدودة ومحدبة وجزئية في أي فضاء انعكاسي هي مجموعة متراصة بضعف ومحدبة والعكس صحيح فإن تقارب سلايس يتطابق مع تقار ب موسكو إذا كان الفضاء انعكاسياً .

تعريف 1.48: [4]

ليكن E فضاءً خطياً منظماً ما ولتكن: $\{f_n, f: E \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}, n \in \mathbb{N}\}$ متتالية من دوال $\Gamma(E)$, ستقول إن (f_n) متقاربة وفق سلايس من f إذا وفقط إذا تقاربت متتالية المجموعات $(epi\, f_n)$ وفق سلايس من $epi\, f$.

لقد بين بير[4] أن التعريف السابق يؤول إلى التعريف التالي:

تعريف 1.49: تقارب متتالية من الدوال وفق سلايس: [4]

ليكن E فضاءً خطياً منظماً ما ولتكن: $\{f_n, f: E \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}, n \in \mathbb{N}\}$ متتالية من دوال $\Gamma(E)$, سنقول إن (f_n) متقاربة وفق سلايس من f وسنرمز لذلك بالشكل ($f = \tau_s - \lim_n f_n$) إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان:

(ا) من أجل كل $(y, \eta) \epsilon\, epi(f^*)$ مع $f^*(y) < \eta$ ومن أجل كل متتالية محدودة (ξ_n) من نقاط E يوجد $n_0 \epsilon \mathbb{N}$ بحيث أنه مهما يكن $n > n_0$ فإن:

$$f_n(\xi_n) > \langle y, \xi_n \rangle - \eta$$

(2) من أجل كل $\xi \epsilon E$ يوجد متتالية (ξ_n) من نقاط E بحيث أن :

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f_n(\xi_n)$$

بشكل مشابه إذا كانت: $\{g_n, g: E^* \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}, n \in \mathbb{N}\}$ متتالية من دوال $\Gamma^*(E^*)$ عندئذ سنقول إن (g_n) متقاربة وفق سلايس من g وسنرمز لذلك بالشكل: $g = \tau_s^* - \lim_n g_n$ إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان:

(ا) من أجل كل $(x, \alpha) \epsilon\, epi(g^*)$ مع $g^*(x) < \alpha$ ومن إجل كل متتالية محدودة (y_n) من نقاط

E^* يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث أنه مهما يكن $n > n_0$ فإن:

$$g_n(y_n) > \langle x, y_n \rangle - \alpha$$

(2) من أجل كل y من E^* يوجد متتالية (y_n) متقاربة بقوة من y بحيث أن:

$$g(y) - \lim_{n\to\infty} g_n(y_n)$$

<u>نتيجة 1.50:</u>

إذا كان E انعكاسياً فإن الشرط الأول من تقارب سلايس يؤول إلى:

$$\forall \xi \in E, \forall \xi_n \overset{\omega}{\rightarrow} \xi : f(\xi) \leq \lim_{n\to\infty} \inf\ f_n(x_n)$$

<u>مبرهنة 1.51:</u> [4]

ليكن E فضاءً خطياً منظماً ما , عندئذ فإن التطبيق: $f \rightarrow f^*$ سيكون هومومرفيزم (تطبيق مستمر متباين وغامر وعكسه مستمر) من $\langle \Gamma(E), \tau_s \rangle$ في $\langle \Gamma^*(E^*), \tau_s^* \rangle$.

<u>نتيجة 1.52:</u>

بحسب المبرهنة السابقة فإنه إذا كانت $\{f_n : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, n \in \mathbb{N}\}$ متتالية من الدوال التي تنتمي إلى $\Gamma(E)$ بحيث أنه إذا كانت $f \in \Gamma(E)$ وكانت (f_n) متقاربة وفق سلايس من من f فإن (f_n^*) متقاربة وفق سلايس من f^* .

<u>مبرهنة 1.53:</u> [3]

ليكن E فضاء باناخ ولتكن: $\{f_n, f : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, n \in \mathbb{N}\}$ متتالية من الدوال التي تنتمي إلى $\Gamma(E)$ عندئذ فإن القضايا التالية متكافئة:

$$(i)\ f = \tau_s - \lim\nolimits_n f_n$$

$$(ii) \begin{cases} \forall \xi \in E \ \ , \exists\ (\xi_n) \rightarrow \xi : f(\xi) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\xi_n) \\ \forall y \in E^* \ \ , \exists (y_n) \rightarrow y : f^*(y) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n^*(y_n) \end{cases}$$

$$(iii) \begin{cases} \forall \xi \in dom(\partial f), \exists\ (\xi_n) \rightarrow \xi : f(\xi) \geq \lim\limits_{n\to\infty} \sup\ f_n(x_n) \\ \forall\ y \in rng(\partial f), \exists (y_n) \rightarrow y : f^*(y) \geq \lim\limits_{n\to\infty} \sup f_n^*(y_n) \end{cases}$$

حيث أن:

$$dom(\partial f) = \{\xi \in E; \exists y \in E^*: (\xi, y) \in \partial f\}$$
$$rng(\partial f) = \{y \in E^*; \exists \xi \in E: (\xi, y) \in \partial f\}$$

مبرهنة 1.54: [3]

ليكن E فضاء باناخ ولتكن: $\{f_n, f: E \rightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}, n \in \mathbb{N}\}$ متتالية من الدوال التي تنتمي إلى $\Gamma(E)$ عندئذ $f = \tau_s - \lim_n f_n$ إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان:

(i) $\partial f = \lim_n \partial(f_n)$

(ii) $\exists(u,z) \in (\partial f), \exists(u_n, z_n) \in \partial(f_n): (u_n, z_n) \rightarrow (u,z), f_n(u_n) \rightarrow f(u)$

مبرهنة 1.55: [3]

ليكن E فضاء باناخ ما ولتكن $f: E \rightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ أحد الدوال التي تنتمي إلى $\Gamma(E)$, عندئذ من أجل كل $y \in E^*$ مع $f^*(y) < +\infty$ يوجد متتالية $(y_n) \in rng(\partial f)$ متقاربة بقوة من y بحيث أن:

$$f^*(y) = \lim_{n\to\infty} f^*(y_n)$$

تعريف 1.56:

ليكن E فضاءً خطياً منظماً ما ولتكن: $\{f_t, f: E \rightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}, t > 0, t \in \mathbb{R}\}$ متتالية من دوال $\Gamma(E)$, سنقول إن (f_t) متقاربة وفق سلايس من f إذا وفقط إذا كانت (f_{t_n}) متقاربة وفق سلايس من f وذلك من أجل كل متتالية (t_n) من الأعداد الحقيقية الموجبة والمتقاربة من الصفر.

مبرهنة 1.57:

لتكن: $\{f_n, f: E \rightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}, n \in \mathbb{N}\}$ متتالية من دوال $\Gamma(E)$, إذا كان $f = \tau_s - \lim_n f_n$ عندئذٍ فإنّ :

a) – $f(\xi) \le f_n(\xi)$ وذلك من أجل n كبير بقدرٍ كافٍ .

b) – من أجل كل متتالية (ξ_n) متقاربة من ξ فإن: $f(\xi) \le \liminf_{n\to\infty} f_n(x_n)$

إثبات :

a) – من أجل المتتالية الثابتة $(\xi)_{n\in N}$ فإنه من أجل كل $(y,\eta) \in epi(f^*)$ مع $f^*(y) < \eta$ فإنه بحسب تعريف الدالة المرافقة سيكون : $\langle y,x\rangle - \eta < f(x)$ وذلك من أجل كل x من E . لذلك فإنه بحسب الشرط الأول من تقارب سلايس يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث أنه مهما يكن $n > n_0$ فإن:

$$\langle y,\xi\rangle - \eta < f_n(\xi)$$

وبما أن $f \in \Gamma(E)$ فإن f هي الغلاف العلوي لجميع الدوال الملساء المستمرة والتي تحد f من الأدنى لذلك فإن $f(\xi) \leq f_n(\xi)$ من أجل كل $n > n_0$.

b) – بحسب ما سبق فإن $f(\xi_n) \leq f_n(\xi_n)$ وذلك من أجل كل $n > n_0$. الأمر الذي ينتج عنه أن:

$$f(\xi) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \leq \liminf_{n\to\infty} f_n(x_n)$$

وذلك بالاعتماد على كون f نصف مستمر من الأدنى. ■

مبرهنة 1.58:

لتكن: $\{f_n, f: E \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}, n \in \mathbb{N}\}$ متتالية من دوال $\Gamma(E)$, ولنفترض أن (f_n) متقاربة وفق سلايس من f عندئذ مهما يكن $\lambda > 0$ فإن (λf_n) ستتقارب وفق سلايس من λf .

إثبات :

لتكن $(y,\eta) \in epi((\lambda f)^*)$ مع $(\lambda f)^*(y) < \eta$ ولتكن (ξ_n) متتالية كيفية ومحدودة من نقاط E عندئذ لكون $(\lambda f)^*(y) < \eta$ فإن:

$$sup_{\xi\in E}\{\langle y,\xi\rangle - \lambda f(\xi)\} < \eta$$

وبالتالي فإن:

$$\lambda\, sup_{\xi\in E}\left\{\langle \frac{y}{\lambda},\xi\rangle - f(\xi)\right\} < \eta$$

وبالتالي فإن:

$$\lambda(f^*)\left(\frac{y}{\lambda}\right) < \eta$$

وبالتالي فإن:

$$(f^*)\left(\frac{y}{\lambda}\right) < \frac{\eta}{\lambda}$$

الآن لكون (f_n) متقاربة وفق سلايس من f ولكون $(f^*)\left(\frac{y}{\lambda}\right) < \frac{\eta}{\lambda}$ فإنه يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث أنه مهما يكن $n > n_0$ فإن:

$$f_n(\xi_n) > \langle \frac{y}{\lambda},\xi_n\rangle - \frac{\eta}{\lambda}$$

وبالتالي فإن:

$$(\lambda f_n)(\xi_n) > \langle y,\xi_n\rangle - \eta$$

وبالتالي فإن الشرط الأول محقق.

أما إثبات تحقق الشرط الثاني فهو أمر واضح . ■

الفصل الثاني

المشتقاتمن المر تبة الأولى وفق سلايس في فضاءات منظمة

The first order slice derivatives in normed space

سنعتبر في هذا الفصل أن Eفضاء ً خطياً منظماً , وأن $f: E \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ أحد الدوال التي تنتمي إلى $\Gamma(E)$, و أن f ذات قيمة محدودة في نقطة x من E .

1− المشتق من المرتبة الأولى وفق سلايس وخواصه

تعريف 2.1:

لتكن نسب الدوال التفاضلية الآتية :

$$(\Delta_t f)_x(\xi) = \frac{1}{t}\{f(x+t\xi) - f(x)\}; \forall t > 0, \forall \xi \epsilon \mathrm{E}.$$

إذا كانت هذه الدوال $(\Delta_t f)_x$ تتقارب وفق سلايس عندما $t \to 0$ من دالة $\varphi \in \Gamma(E)$ عندئذ سنقول إن f قابلة للاشتقاق وفق سلايس في x وسنكتب عوضاً عن الدالة φ f'_x .

• نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق وفق سلايس إذا كانت قابلةً للاشتقاق في كل نقطة x من E.

ملاحظات :

1) واضح أنه إذا كان $f \in \Gamma(E)$ فإن كلاً من الدوال $(\Delta_t f)_x$ تنتمي إلى$\Gamma(E)$ وذلك مهما يكن $t > 0$. ومن الواضح حسب التعريف السابق أن $f'_x \in \Gamma(E)$.

2) من التعريف نجد أن بيان $(\Delta_t f)_x$ يساوي:

$$gph(\Delta_t f)_x = \frac{1}{t}\{gph(f) - (x, f(x))\}$$

وذلك لأن:

$$gph(\Delta_t f)_x = \left(\xi, \frac{1}{t}\{f(x+t\xi) - f(x)\}\right) = \frac{1}{t}\{(t\xi, f(x+t\xi) - f(x))\}$$
$$= \frac{1}{t}\{(\eta - x, f(\eta) - f(x))\}: \eta = x + t\xi$$
$$= \frac{1}{t}\{(\eta, f(\eta)) - (x, f(x))\} = \frac{1}{t}\{gph(f) - (x, f(x))\}$$

وبالتالي فإن f قابلة للاشتقاق وفق سلايس في x إذا وفقط إذا تقاربت عائلة المجموعات $\frac{1}{t}\{gph(f) - (x, f(x)) : t > 0\}$ من $gph(f'_x)$ وفق سلايس.

مبرهنة 2.2 :

الدوال $(\Delta_t f)_x$ دوال متزايدة أي عندما $t_1 \le t_2$ فإن : $\left(\Delta_{t_1} f\right)_x(\xi) \le \left(\Delta_{t_2} f\right)_x(\xi)$

إثبات :

لدينا :

$$f(x+t_1\xi)-f(x) = f\left(\frac{t_1}{t_2}(x+t_2\xi)+\frac{t_2-t_1}{t_2}x\right)-f(x)$$
$$\le \frac{t_1}{t_2}f(x+t_2\xi)+\frac{t_2-t_1}{t_2}f(x)-f(x) = \frac{t_1}{t_2}\left(f(x+t_2\xi)-f(x)\right)$$

ومنه $$\frac{1}{t_1}\left(f(x+t_1\xi)-f(x)\right) \le \frac{1}{t_2}\left(f(x+t_2\xi)-f(x)\right)$$

وبالتالي فإن $\left(\Delta_{t_1} f\right)_x(\xi) \le \left(\Delta_{t_2} f\right)_x(\xi)$ وهو المطلوب. ■

نتيجة 2.3:

إذا كان f قابلاً للاشتقاق وفق سلايس في نقطة x من E فإن:

$f_x'(\xi) \le (\Delta_t f)_x(\xi)$ وذلك $\forall t > 0$.

إثبات :

يتم البرهان بمراعاة أن الدوال $(\Delta_t f)_x$ تتناقص (وذلك بحسب المبرهنةالسابقة)عندما يتناقص t نحو الصفر . وبمراعاة المبرهنة 1.57−(a) أيضاً . ■

مبرهنة2.4:

لنفترض أن f دالة قابلة للاشتقاق وفق سلايس في نقطة x من E عندئذ ما يلي سيكون صحيحاً :

(1) الدالة f_x' متجانسة إيجابياً من المرتبة الأولى .

(2) $f_x'(0) = 0$.

إثبات :

(1) حتى تكون f_x' متجانسة إيجابياً من المرتبة الأولى يجب أن يكون: $f_x'(\lambda\xi) = \lambda f_x'(\xi)$ وذلك مهما يكن $\lambda > 0$. الآن:

$$\forall \lambda > 0:\ (\Delta_t f)_x(\lambda\xi) = \{f(x+\lambda t\xi)-f(x)\}/t\,;\forall t>0, \forall \xi \epsilon \mathrm{E}$$

وبفرض أن $\eta = \lambda t$ نجد أن:

$$(\Delta_t f)_x(\lambda\xi) = \frac{\lambda}{\eta}\{f(x+\eta\xi)-f(x)\} = \lambda\,(\Delta_\eta f)_x(\xi);\eta > 0$$

وبمراعاة المبرهنة 1.58 نجد أن:

$$\lambda f_x'(\xi) = \tau_s - \lim_{n}\left(\lambda(\Delta_{\eta_n} f)_x(\xi)\right) = \tau_s - \lim_{n}\left((\Delta_{t_n} f)_x(\lambda\xi)\right) = f_x'(\lambda\xi)$$

(2) نلاحظ بدايةً أن: $(\Delta_t f)_x(0) = 0$ مهما يكن t .

الآن بما أن: $f_x' = \tau_s - lim_n(\Delta_{t_n} f)_x$ فإننا باستخدام النتيجة 2.3 سنجد أن:

$$f_x'(0) \le (\Delta_{t_n} f)_x(0) - 0$$

الأمر الذي يعني أن: $f_x'(0) \le 0$ وأن f_x' ذات قيمة محدودة عند الصفر(طبعاً وبمراعاة أنها دالة فعلية).

من جهة أخرى لكون f_x' متجانس إيجابياً من المرتبة الأولى سنجد أن:

$$f_x'(0) = f_x'(\lambda.0) = \lambda f_x'(0)$$

الأمر الذي يعني أن $f_x'(0) = 0$. وهو المطلوب . ■

مبرهنة 2.5:

لنفترض أن f قابلة للاشتقاق وفق سلايس في نقطة x من E عندئذ إذا كان للدالة f قيمة محلية صغرى في x فإن: $f_x'(\xi) \ge 0$ وذلك مهما تكن $\xi \in E$.

إثبات :

بما أنه للدالة f قيمة محلية صغرى في x , فلها قيمة صغرى في x وذلك حسب المبرهنة 1.32 وبالتالي فإنه من أجل أي $\xi \in E$ ومن اجل أي متتالية t_n من الأعداد الحقيقية الموجبة والمتقاربة من الصفر فإن: $f(x + t_n\xi) \ge f(x)$

وبالتالي فإن: $\dfrac{f(x+t_n\xi)-f(x)}{t_n} \ge 0$

وبالتالي أيضاً فإن: $(\Delta_{t_n} f)_x(\xi) \ge 0$

الآن من أجل أي $\xi \in E$ فإنه بحسب الشرط الثاني من تقارب سلايس فإنه يوجد متتالية (ξ_n) من نقاط E متقاربة من ξ بحيث أن:

$$.f_x'(\xi) = \lim_{n\to\infty} (\Delta_{t_n} f)_x(\xi_n) \ge 0$$

الأمر الذي يعني أن $f_x'(\xi) > 0$ وذلك مهما تكن $\xi \in E$, وهو المطلوب. ■

مبرهنة 2.6:

لنفترض أن f قابلة للاشتقاق وفق سلايس في نقطة x من E , ولنفترض أن $f_x'(\xi) \geq 0$ وذلك من أجل كل $\xi \in E$ عندئذ فإنه للدالة f قيمة صغرى في x .

إثبات :

نلاحظ أنه من أجل كل $t \in (0,1]$ ومن أجل كل $E \ni u$ أن:

$$f\big(x+t(u-x)\big) = f(tu+(1-t)x) \leq tf(u)+(1-t)f(x)$$

وذلك لأن f محدبة , واعتماداً على العلاقة السابقة نجد أن:

$$f\big(x+t(u-x)\big) - f(x) \leq tf(u)+(1-t)f(x)-f(x)$$

$$= t(f(u)-f(x))$$

وينتج عن ذلك أن: $\frac{f(x+t(u-x))-f(x)}{t} \leq f(u)-f(x)$

وبالتالي فإن : $(\Delta_t f)_x(u-x) \leq f(u)-f(x)$

الآن لتكن (t_n) متتالية من الأعداد الواقعة ضمن المجال$(0,1]$ والمتقاربة من الصفر عندئذ بحسب النتيجة 2.3 نجد أن:

$$0 \leq f_x'(u-x) \leq (\Delta_{t_n} f)_x(u-x) \leq f(u)-f(x)$$

وهذا يعني أن: $f(u) \geq f(x)$ ومن كيفية u نجد أنه للدالة f قيمة صغرى في x على كامل E,

وهذا هو المطلوب. ■

2- العلاقة بين المشتق من المرتبة الأولى وفق سلايس وتحت تفاضلها

مبرهنة مساعدة 2.7:

لتكن f أحد الدوال المحدبة والخاصة والمحدودة في نقطة x من E عندئذ فإن الشرطين التاليين متكافئان:

$(i)\ z \epsilon \partial f(x)$

$(ii)\ \exists\ \varepsilon > 0; \forall \xi \in B(x,\varepsilon) : f(\xi) \geq f(x) + \langle z, \xi - x\rangle$

حيث أن: $B(x,\varepsilon)=\{\xi\in E; \|\xi-x\|<\varepsilon\}$

<u>إثبات :</u>

$(i)\Rightarrow(ii)$: أمر واضح ينتج مباشرةً من تعريف $\partial f(x)$.

$(ii)\Rightarrow(i)$:

حتى نبرهن أن $z\epsilon\,\partial f(x)$ يجب أن نبرهن أن :

$$\forall\xi\in E: f(\xi)\ >\ f(x)+\langle z,\xi-x\rangle$$

إذا كانت $\xi\in E$ تحقق أن: $f(\xi)=+\infty$ فإنه من الواضح أن العلاقة السابقة محققة.

إذا كانت $\xi\in E$ بحيث أن $f(\xi)<+\infty$ وإذا كانت ξ لا تنتمي إلى $B(x,\varepsilon)$ عندئذ سيوجد $\rho>1$

بحيث يكون: $\|\xi-x\|<\rho\,\varepsilon$

و منه سنجد أن : $\left\|\frac{\xi}{\rho}\quad\frac{x}{\rho}\right\|<\ \varepsilon$

وبالتالي فإن : $\left\|\left(\frac{\xi}{\rho}+\left(1-\frac{1}{\rho}\right)x\right)-x\right\|<\ \varepsilon$

الأمر الذي يعني أن: $\left(\frac{\xi}{\rho}+\left(1-\frac{1}{\rho}\right)x\right)\in B(x,\varepsilon)$

وبالتالي فإنه بحسب (ii) سيكون:

$$f\left(\frac{\xi}{\rho}+\left(1-\frac{1}{\rho}\right)x\right)\geq f(x)+\left\langle z,\frac{1}{\rho}\xi+\left(1-\frac{1}{\rho}\right)x-x\right\rangle$$

الآن بما أن $\rho>1$ فإن : $0<\frac{1}{\rho}<1$ وبمراعاة ذلك ومراعاة أن f محدبة ومراعاة العلاقة السابقة

سنجد أن:

$$\frac{1}{\rho}f(\xi)+\left(1-\frac{1}{\rho}\right)f(x)\geq f(x)+\frac{1}{\rho}\langle z,\xi-x\rangle$$

وبضرب طرفي المتراجحة بالعدد (ρ) نجد مباشرةً أن: $f(\xi)\geq f(x)+\langle z,\xi-x\rangle$

وهو المطلوب. ■

<u>مبرهنة 2.8:</u>

لنفترض أن f قابل للاشتقاق وفق سلايس في نقطة x من E عندئذ:

a– إذا كانت $z\epsilon\partial f(x)$ فإن: $f'_x(\xi)\geq\langle z,\xi\rangle;\ \forall\xi\epsilon E$.

b– إذا كانت: $f'_x(\xi)\geq\langle z,\xi\rangle,\ \forall\xi\epsilon E$ فإن $z\epsilon\,\partial f(x)$ وذلك مهما يكن $z\in E^*$.

<u>إثبات :</u>

a– بما أن $z \in \partial f(x)$ فإن: $f(x+t\xi) \geq f(x) + t\langle z, \xi\rangle$

وبالتالي فإن : $(\Delta_t f)_x(\xi) \geq \langle z, \xi\rangle \qquad (2.1)$

ونتيجةً لتقارب $(\Delta_{t_n} f)_x)$ وفق سلايس من $f_x'(\xi)$ فإنه بحسب الشرط الثاني من تقارب سلايس سيوجد من أجل كل $\xi \in E$ متتالية (ξ_n) من نقاط E متقاربة من ξ بحيث أن:

$$f_x'(\xi) = \lim_{n\to\infty} (\Delta_{t_n} f)_x(\xi_n) \geq \lim_{n\to\infty} \langle z, \xi_n\rangle = \langle z, \xi\rangle$$

وذلك بالاستفادة من العلاقة (2.1) ومن كون $\langle z, .\rangle$ دالة مستمرة .

وبالنتيجة فإن: $\langle z, \xi\rangle \geq f_x'(\xi)$ وذلك من اجل كل $\xi \in E$

b– لنفترض أن $z \in E^*$ بحيث أن: $f_x'(\xi) \geq \langle z, \xi\rangle, \ \forall \xi \in E$ ولنفترض جدلاً أن: $z \notin \partial f(x)$

عندئذ فبحسب المبرهنة 2.7 سيكون:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \xi \in B(x, \varepsilon) : f(\xi) < f(x) + \langle z, \xi - x\rangle$$

ويكافئ هذا الكلام أنه توجد متتالية (ξ_n) من نقاط E متقاربة من الصفر بحيث أن:

$$f(x+\xi_n) - f(x) - \langle z, \xi_n\rangle = \alpha_n < 0, \forall n \in \mathbb{N} \qquad (2.2)$$

وبوضع:

$$\varphi(\xi) - f(x+\xi) - f(x) - \langle z, \xi\rangle$$

نجد أن φ نصف مستمرة من الأدنىو أن: $\varphi(0)=0$ وبالتالي فإن:

$$0 = \varphi(0) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \varphi(\xi_n) = \lim_{n\to\infty} \inf \left(f(x+\xi_n) - f(x) - \langle z, \xi_n\rangle \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \inf (\alpha_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sup (\alpha_n) \leq 0$$

وهذا يعني أن :

$$\lim_{n\to\infty} \inf (\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} \sup (\alpha_n) = 0$$

وبالتالي فإن:
$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

ونتيجةً لذلك يمكننا أن نفترض أن: $1 \quad < \alpha_n < 0$ وذلك من أجل n كبيرة بقدر كاف .

من جهة أخرى فإن الدالة:

$$g(\xi) = f(x+\xi) - f(x)$$

محدبة بوضوح وتحقق أن $g(0) = 0$ ونتيجةً لتحدبها فإنه من أجل n كبيرة بقدر كاف فإن:

$$g(-\alpha_n \xi) = g(-\alpha_n \xi + (1+\alpha_n)(0)) \leq$$

$$-\alpha_n g(\xi) + (1+\alpha_n) g(0) = -\alpha_n g(\xi) : \forall \xi \epsilon E$$

أي أن:
$$f(x + (-\alpha_n)\xi_n) - f(x) \leq -\alpha_n (f(x+\xi_n) - f(x))$$

ونتيجةً لذلك نجد بأخذ $(t_n) = (-\alpha_n)$ متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة والمتقاربة من الصفر أن:

$$(\Delta_{-\alpha_n} f)_x(\xi_n) = \frac{f(x+(-\alpha_n)\xi_n) - f(x)}{-\alpha_n} \leq f(x+\xi_n) - f(x)$$

وبالتالي وبمراعاة 2.2 فإن :

$$(\Delta_{-\alpha_n} f)_x(\xi_n) \leq \langle z, \xi_n \rangle - (-\alpha_n) \qquad (2.3)$$

من جهة أخرى بما أن $f_x'(\xi) \geq \langle z, \xi \rangle , \ \forall \xi \epsilon E$ فرضاً فإن: $(f_x')^*(z) \leq 0$

وبالتالي فإن: $(f_x')^*(z) < -\alpha_n$ وذلك مهما يكن العدد الطبيعي n , عندئذ من أجل المتتالية (ξ_n) المتقاربة من الصفر (و بالتالي المحدودة) والمحققة للعلاقة (2.2) وبأخذ $0 < (t_n) = (-\alpha_n) \to 0$ نجد بحسب الشرط الأول من تقارب سلايس للمتتالية $(\Delta_{-\alpha_n} f)_x$ نحو f_x' أن :

$$(\Delta_{-\alpha_n} f)_x(\xi_n) = \frac{f(x+(-\alpha_n)\xi_n) - f(x)}{-\alpha_n} > \langle z, \xi_n \rangle - (-\alpha_n) \qquad (2.4)$$

من العلاقتين (2.3) , (2.4) نجد أن هناك تناقضاً وسببه أن $z \notin \partial f(x)$ وهذا يعني أن $z \epsilon \partial f(x)$ وهو المطلوب . ■

مبرهنة 2.9:

ليكن E فضاءً خطياً منظماً ما , وليكن $f:E\rightarrow R$ حيث $f\in\Gamma(E)$ دالة قابلة للاشتقاق وفق سلايس في x من E مع $\operatorname{int}(epi(f))\neq\varnothing$ عندئذٍ فإن:

$$f'_x(\xi)=\max\{\langle z,\xi\rangle,\quad \forall z\in\partial f(x)\}\ .$$

إثبات :

بما أن f دالة محدبة ومستمرة في x فإن $\partial f(x)\neq\varnothing$ وعندئذٍ من أجل كل $z\in\partial f(x)$ فإن: $\langle z,\xi\rangle\leq f'_x(\xi)$ وذلك مهما يكن $\xi\in E$, وبالتالي فإن:

$$\max\{\langle z,\xi\rangle;\ z\in\partial f(x)\}\leq f'_x(\xi)\ .$$

الآن لإثبات أن $f'_x(\xi)\leq\max\{\langle z,\xi\rangle\ ;z\in\partial f(x)\}$ علينا إيجاد $z\in\partial f(x)$ بحيث أن $f'_x(\xi)=\langle z,\xi\rangle$ وذلك مهما يكن ξ .

من أجل ذلك لنأخذ المجموعة المحدبة التالية :

$$T=\{(x+t\xi,f(x)+tf'_x(\xi))\in E\times R\quad ,t>0\ ,\ \xi\in E\}$$

عندئذٍ بحسب النتيجة 2.3 فإن:

$$f(x+t\xi)\geq f(x)+tf'_x(\xi)\quad ,\forall t\geq 0$$

وهذا يعني أن:

$$(x+t\xi,f(x)+tf'_x(\xi))\notin\operatorname{int}(epi(f))\quad ,\forall t\geq 0\ .$$

وبالتالي فإن :

$$\operatorname{int}(epi(f))\cap T=\varnothing$$

الآن بما أن $T,\ epi(f)$ محدبتان و $\operatorname{int}(epi(f))\cap T=\varnothing$ فإنه بحسب المبرهنة 1.30 يوجد $z\in E^*$ وعددان γ,β بحيث أن $(z,\beta)\neq(0_{E^*},0)$ وتتحقق العلاقة :

$$\langle z,u\rangle+\beta\alpha\leq\gamma\leq\langle z,x+t\xi\rangle+\beta(f(x)+tf'_x(\xi))\qquad(2.5)$$

وذلك من أجل كل $(\alpha,u)\in epi(f)$ وكل $t\geq 0$.

عندئذٍ من أجل $u=x$ و $t=0$ سنحصل بشكل خاص على $\alpha\geq f(x)=f(u)$.

ومن 2.5 سنحصل من أجل $u=x$ و $t=0$ على $\beta\alpha\leq\beta f(x)$ الأمر الذي يعني أن $\beta\leq 0$.

إذا فرضنا أن $\beta=0$ سوف نحصل من المتراجحة (2.5) مع $t=0$ على $\langle z,u-x\rangle\leq 0$ وذلك من أجل كل $u\in E$ الأمر الذي يعني أن $z=0_{E^*}$.

فإذا كان $z=0_{E^*},\beta=0$ فإن $(z,\beta)=(0_{E^*},0)$ وهذا تناقض, إذاً $\beta\neq 0$ ولذلك $\beta<0$ وبالتالي فإنه من (2.5) سنحصل على :

$$\frac{1}{\beta}\langle z,u-x-t\xi\rangle+\alpha \ge f(x)+tf'_x(\xi) \qquad (2.6)$$

وذلك من أجل كل $(u,\alpha)\in epi(f)$ مع $t\ge 0$.

الآن بتعويض $\alpha=f(u)$, $t=0$ في (2. 6) سنجد أن:

$$f(u)\ge f(x)-\frac{1}{\beta}\langle z,u-x\rangle \qquad ,\forall u\in E$$

الأمر الذي يعني أن: $$\frac{1}{\beta}z\in\partial f(x) \qquad (2.7)$$

الآن من اجل $u=x$, $\alpha=f(x)$ سنحصل من (2. 6) على:

$$-\frac{1}{\beta}\langle z,\xi\rangle\ge f'_x(\xi) \qquad (2.8)$$

من (2. 7) و (2. 8) سنجد أن :

$$f'_x(\xi)\le\max\{\langle z,\xi\rangle \quad ; z\in\partial f(x)\}$$

الأمر الذي يعني مع مراعاة المتراجحة المعاكسة المبينة في بداية المبرهنة أن :

$$f'_x(\xi)=\max\{\langle z,\xi\rangle \quad ;z\in\partial f(x)\}$$ وهو المطلوب. ■

3- دراسة قابلية اشتقاق دالة من الشكل $f\circ A$ حيث A مؤثر خطي إيزومومرفيزم و f دالة قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الأولى

<u>مبرهنة 2.10 :</u>

ليكن X , E فضائين خطيين منظمين وليكن $A:X\to E$ مؤثراً خطياً إيزومومرفيزم ولتكن $f:E\to R\cup\{+\infty\}$ دالة تنتمي إلى $\Gamma(E)$ وليكن $x\in X$ عندئذٍ :

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الأولى في Ax فإن $f\circ A$ قابلة للاشتقاق وفق سلايس في x مع :

$$(f\circ A)'_x(\xi)=f'_{Ax}(A\xi)=(f'_{Ax}\circ A)(\xi)$$

<u>إثبات :</u>

بدايةً نلاحظ أن : $$(\Delta_t f)_{Ax}(A\xi)=\frac{f(Ax+t.A\xi)-f(Ax)}{t}$$

$$=\frac{(f\circ A)(x+t\xi)-(f\circ A)(x)}{t}=(\Delta_t(f\circ A))_x(\xi)$$

لنفرض أنّ f قابلة للاشتقاقوفق سلايس من المرتبة الأولى في Ax, ولنبين أن الدوال $\left(\Delta_t \left(f \circ A\right)\right)_x$ تتقارب وفق سلايس من $\left(f'_{Ax} \circ A\right)$, من أجل ذلك لنأخذ أي متتالية محدودة $\left(\xi_n\right)$ من نقاط X عندئذ ونتيجةً لكون A خطي و إيزومورفيزم فإن المتتالية $\left(A\xi_n\right)$ محدودة أيضاً وليكن:

$$\left(y,\eta\right) \in epi\left(f'_{Ax} \circ A\right)^* \; with \left(f' \circ A\right)^* \left(y\right) < \eta$$

عندئذ بحسب تعريف الدالة المرافقة فإن:

$$\left\langle y,\xi_n \right\rangle - \eta < \left(f'_{Ax} \circ A\right)\left(\xi_n\right) = f'_{Ax}\left(A\left(\xi_n\right)\right) \; ; \forall n \in N \qquad (2.9)$$

وبالتالي ونتيجةً لكون f قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الأولى في Ax فإنه بحسب النتيجة 2.3 وبحسب العلاقة (2.9) نجد أن :

$$\left(\Delta_{t_n} f\right)_{Ax}\left(A\xi_n\right) > \left\langle y,\xi_n \right\rangle - \eta \; ; \quad \forall n > n_0$$

وبالتالي فإن:

$$\left(\Delta_{t_n}\left(f \circ A\right)\right)_x \left(\xi_n\right) > \left\langle y,\xi_n \right\rangle - \eta$$

إذاً الشرط الأول من تقارب سلايس محقق.

لبيان تحقق الشرط الثاني فإنه لكون f قابلةً للاشتقاق وفق سلايس في Ax فإنّه من أجل أيّ $\xi \in X$ يوجد متتالية $\left(\xi_n\right)$ من نقاط X متقاربة من ξ وبالتالي نتيجةً لكون A إيزومورفيزم فإن المتتالية $\left(\xi'_n\right) = \left(A\,\xi_n\right)$ متقاربة من $\xi' = A\,\xi$ بحيث أنّ :

$$\left(f'_{Ax} \circ A\right)\left(\xi\right) = f'_{Ax}\left(A\xi\right) = f'_{Ax}\left(\xi'\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\Delta_{t_n} f\right)_{Ax}\left(A\xi_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\Delta_{t_n}\left(f \circ A\right)\right)_x\left(\xi_n\right)$$

و تحقق شرطي تقارب سلايس يعني أنّ $\left(f \circ A\right)$ دالة قابلة للاشتقاق وفق سلايس في x ,وهو المطلوب.■

4- العلاقة بين المشتق وفق سلايس ومشتق فريشيه لدالة محدبة

لقد بين روكافيللر أن المشتق فوق البيان لدالة f (محدبة ونصف مستمرة من الأدنى وفعلية) من المرتبتين الأولى والثانية يساوي مشتق فريشيه إذا كانت f قابلة للاشتقاق وفق فريشيه (وذلك في الفضاءات المنتهية البعد) . وما سنبينه نحن هو أن مشتق سلايس من المرتبة الأولى لدالة f تنتمي إلى $\Gamma(E)$ يساوي مشتق فريشيه إذا كانت f قابلة للاشتقاق وفق فريشيه وذلك إذا كان E فضاءً خطياً منظماً .

مبرهنة 2.11:

لنفترض أن $f: E \to \mathbb{R}$ أحد الدوال المحدبة والقابلة للاشتقاق وفق فريشيه في (x) عندئذ f قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الأولى في x مع:

$$f'_x(\xi) = \langle Df(x), \xi \rangle$$

<u>**إثبات :**</u>

بما أن f قابلة للاشتقاق وفق فريشيه في x عندئذ فبحسب المبرهنة 1.18 فإن f مستمر في x (وبالتالي f نصف مستمر من الأدنى في x) ولدينا بالفرض أن f فعلية لأن مداه محتوى في $\mathbb{R}$, ولدينا أيضاً بالفرض أن f محدبة إذاً بالمحصلة سيكون f من $\Gamma(E)$.

من جهة أخرى فإن الدالة: $\varphi(\xi) = \langle Df(x),\xi \rangle$ هي دالة مستمرة في كل نقطة ξ من E (وبالتالي f نصف مستمر من الأدنى في كل نقطة ξ من E) وخطية (وبالتالي فهي محدبة) و فعلية بوضوح (بالطبع كل هذا ناتج من تعريف مشتق فريشيه) .

الآن وبوساطة صيغة تايلور من المرتبة الأولى سنجد أن:

$$f(x+t\xi) = f(x) + t\langle Df(x),\xi\rangle + o(\| t\xi \|)$$

حيث أن: $\lim\limits_{t\to 0} \frac{o(t\|\xi\|)}{t} = 0$

مرةً أخرى بتطبيق المبرهنة 1.18 نجد أن:

$$f(x+t\xi) - f(x) - t\langle Df(x),\xi\rangle \geq 0$$

وبالتالي فإن: $o(\| t\xi \|) \geq 0$, وينتج عن صيغة تايلور من المرتبة الأولى أن:

$$(\Delta_t f)_x(\xi) = \langle Df(x),\xi\rangle + \frac{o(t\|\xi\|)}{t}$$

لنبرهن الآن أن: $\varphi = \tau_s - lim_n(\Delta_{t_n} f)_x$ وذلك من أجل كل متتالية (t_n) من الأعداد الحقيقية الموجبة والمتقاربة من الصفر.

لتكن $(y,\eta) \in epi(\varphi^*)$ مع $\varphi^*(y) < \eta$ (وبالتالي $\langle y,\xi\rangle - \eta < \varphi(\xi)$ وذلك من أجل كل $\xi \in E$) ولتكن (ξ_n) متتالية محدودة كيفية من نقاط E عندئذ بما أن $\frac{o(t_n\|\xi\|)}{t_n}$ موجباً فإنه من الواضح أن:

$$(\Delta_{t_n} f)_x(\xi_n) = \varphi(\xi_n) + \frac{o(t_n\|\xi_n\|)}{t_n} > \langle y,\xi_n\rangle - \eta$$

وبالنتيجة سيكون: $(\Delta_{t_n} f)_x(\xi_n) > \langle y,\xi_n\rangle - \eta$

وبالتالي سيكون الشرط الأول من تقارب سلايس محقق.

أما لإثبات تحقق الشرط الثاني فإنه من أجل كل $\xi \in E$ ومن أجل أية متتالية (ξ_n) متقاربة من ξ ومن أجل أي $t_n \to 0$ فإن :

$$\lim_{n\to\infty} (\Delta_{t_n} f)_x(\xi_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\xi_n) + \lim_{n\to\infty} \frac{o(t_n \|\xi_n\|)}{t_n} = \varphi(\xi)$$

وذلك لأن φ دالة مستمرة. مع تحقق شرطي تقارب سلايس نجد أن f قابلة للاشتقاق وفق سلايس وأن:

$f_x'(\xi) = \langle Df(x), \xi \rangle$ وهو المطلوب. ■

لاحظ أن الشرط الثاني من تقارب سلايس في المبرهنة السابقة محقق ليس فقط من أجل وجود متتالية متقاربة من ξ وإنما من أجل أية متتالية متقاربة من ξ.

لقد بينا في المبرهنة 2.11 أن مشتق سلايس من المرتبة الأولى لدالة f تنتمي إلى $\Gamma(E)$ يساوي مشتق فريشيه إذا كانت f قابلة للاشتقاق وفق فريشيه وذلك إذا كان E فضاءً خطياً منظماً عاماً. لكن العكس غير صحيح بصورة عامة والمثال التالي يوضح ذلك .

مثال 2.12:

في الفضاء $\ell^1 = \ell^1(\mathbb{R})$ فإن الدالة f التي تساوي النظيم على ℓ^1 المعرف بالشكل:
$\| \xi \| = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|$ قابلة للاشتقاق وفق سلايس في :

1) كل نقطة $x = (x_n)$ من ℓ^1 حيث أن: $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ و :

$$f_x'(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n sgn(x_n)$$

2) كل نقطة $x = (x_n)$ من ℓ^1 حيث أن: $x_n = 0$ من أجل بعض الأدلة n مع

$$f_x'(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

حيث أن:

$$u_n = \begin{cases} \xi_n sgn(x_n) & if \;\; x_n \neq 0 \\ |\xi_n| & if \;\; x_n = 0 \end{cases}$$

3) في النقطة $x = (0,0,0,0,\ldots)$ مع $f_x'(\xi) = \| \xi \|$.

إثبات:

1) لتكن $x = (x_n)$ إحدى نقاط ℓ^1 حيث أن: $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, عندئذ فإن :

$$(\Delta_t f)_x(\xi) - \frac{\|x+t\xi\|-\|x\|}{t} - \sum_{n=1}^{\infty} t^{-1}\{|x_n + t\xi_n| - |x_n|\}$$

لتكن $(y,\eta) c\, epi((f_x')^*)$ مع $(f_x')^*(y) < \eta$ وبالتالي:

$$\langle y,\xi\rangle - \eta < f_x'(\xi);\forall \xi \in E$$

وذلك مهما يكن ξ من ℓ^1, ولتكن:$\{(\xi_m^n), m \geq 1\}$ متتالية محدودة كيفية من نقاط ℓ^1 , من الواضح أن:

$$(\Delta_{t_m} f)_x(\xi_m^n) - f_x'(\xi_m^n) = \sum_{n=1}^{\infty} t_m{}^{-1}\{|x_n + t_m\xi_m^n| - |x_n| - t_m\xi_m^n \operatorname{sgn}(x_n)\}$$

وأن:

$$|x_n + t_m\xi_m^n| - |x_n| - t_m\xi_m^n \operatorname{sgn}(x_n) \geq 0$$

وذلك مهما يكن n, m , وبالتالي فإن:

$$(\Delta_{t_m} f)_x(\xi_m^n) \geq f_x'(\xi_m^n)$$

وبالتالي فإن :

$$(\Delta_{t_m} f)_x(\xi_m^n) > \langle y, \xi_m^n\rangle - \eta$$

وبالتالي فإن الشرط الأول من تقارب سلايس محقق.

الآن ليكن $\xi \in \ell^1$ كيفي , عندئذ سيوجد $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ كبير بشكل كافي بحيث أن :

$$sgn\,(x_n + t_m\xi_n) = sgn(x_n)$$

وذلك مهما يكن $1 \leq n \leq n_0, m > m_0$ كما سيوجد $\varepsilon > 0$ بحيث أن: $\sum_{n>n_0}^{\infty}|\xi_n| < \varepsilon/2$ وبالتالي فإن:

$$|(\Delta_{t_m} f)_x(\xi_n) - f_x'(\xi_n)| = |\sum_{n=1}^{\infty} t_m{}^{-1}\{|x_n + t_m\xi_n| - |x_n|\} - \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \operatorname{sgn}(x_n)|$$

$$= \left|\sum_{n-1}^{n_0} t_m{}^{-1}\{|x_n + t_m\xi_n| - |x_n| - t_m\xi_n \operatorname{sgn}(x_n)\}\right| +$$

$$\left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} t_m{}^{-1}\{|x_n + t_m\xi_n| - |x_n| - t_m\xi_n \operatorname{sgn}(x_n)\}\right| \leq$$

$$2\sum_{n=n_0+1}^{\infty}|\xi_n| < \varepsilon/2$$

وذلك من أجل كل متتالية t_m من الأعداد الحقيقية الموجبة والمتقاربة من الصفر ومهما يكن $m > m_0$,
وبالتالي فإنه يوجد متتالية وهي المتتالية الثابتة (ξ) بحيث أن:

$f_x'(\xi) = \lim_{m \to \infty} (\Delta_{t_m} f)_x(\xi)$ وبالتالي فإن الشرط الثاني محقق.

2) , 3) يتم بشكل مشابه تماماً لما قمنا به في (1).

الفصل الثالث

المشتقات من المرتبة الثانية وفق سلايس في فضاءات منظمة

The second order slice derivatives in normed space

سنعتبر أن E فضاء خطي منظم ما , و أن $f: E \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ أحد الدوال التي تنتمي إلى $\Gamma(E)$ و أن f ذات قيمة محدودة في x من E و أن $z \in E^*$.

1- المشتق من المرتبة الثانية وفق سلايس في فضاء منظم وخواصه

تعريف3.1:

لتكن نسب الدوال التفاضلية من المرتبة الثانية :

$$(\Delta_t^2 f)_{x,z}(\xi) = \frac{1}{t^2}\{f(x+t\xi) - f(x) - t\langle z,\xi\rangle\}; \forall t > 0, \forall \xi \in E.$$

إذا كانت الدوال $(\Delta_t^2 f)_{x,z}$ تتقارب وفق سلايس عندما $t \to 0$ من دالة $\varphi \in \Gamma(E)$ عندئذ سنقول إن f قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق سلايس في x بالنسبة إلى z وسنكتب عوضاً عن الدالة φ $f''_{x,z}$.

ملاحظات:

(1) واضح أن العلاقة السابقة تعتمد فقط على ξ التي تنتمي إلى مجاورة للنقطة x .

(2) الدالة $f''_{x,z}$ من $\Gamma(E)$

(3) واضح أنه إذا كانت f من $\Gamma(E)$ فإن الدوال $(\Delta_t^2 f)_{x,z}$ ستكون أيضاً من $\Gamma(E)$ (مهما يكن $t > 0$) وذلك لأن :

1) $(\Delta_t^2 f)_{x,z}$ محدبة :

$\forall \alpha \in [0,1], \forall u, v \in E:$

$$(\Delta_t^2 f)_x(\alpha u + (1-\alpha)v) = \frac{1}{t^2}\{f(x + t((\alpha u + (1-\alpha)v)) - f(x) - t\langle z, \alpha u + (1-\alpha)v\rangle\}$$

$$= \frac{1}{t^2}\{f(\alpha(x+tu) + (1-\alpha)(x+tv)) - \alpha f(x) - (1-\alpha)f(x) - \alpha t\langle z,u\rangle - (1-\alpha)t\langle z,v\rangle\}$$

$$\le \frac{1}{t^2}\{\alpha f(x+tu) - \alpha f(x) - \alpha t\langle z,u\rangle\} + \frac{1}{t^2}\{(1-\alpha)(f(x+tv) - f(x) - t\langle z,v\rangle)\}$$

$$= \alpha\,(\Delta_t^2 f)_{x,z}(u) + (1-\alpha)(\Delta_t^2 f)_{x,z}(v).$$

2) $(\Delta_t^2 f)_{x,z}$ نصف مستمرة من الأدنى وذلك لأن:

من أجل كل متتالية (ξ_n) من نقاط E متقاربة من نقطة $\xi \epsilon E$ وبمراعاة أن f نصف مستمرة من الأدنى فإن:

$$\lim_{n\to\infty} inf (\Delta_t^2 f)_{x,z}(\xi_n) = \lim_{n\to\infty} \inf \frac{1}{t^2}\{f(x+t\xi_n) - f(x) - t\langle z,\xi_n\rangle\}$$
$$\geq \frac{1}{t^2}\{f(x+t\xi) - f(x) - t\langle z,\xi\rangle\} = (\Delta_t^2 f)_{x,z}(\xi)$$

3) $(\Delta_t^2 f)_{x,z}$ فعلية لأن f فعلية ومحدودة في x .

<u>مبرهنة 3.2:</u>

لنفترض أن f قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق سلايس في x بالنسبة إلى $z \in E^*$ عندئذ ما يلي سيكون صحيحاً :

(1) الدالة $f''_{x,z}$ متجانسة إيجابياً من المرتبة الثانية.

(2) $f''_{x,z}(0) = 0$.

<u>إثبات :</u>

(1) حتى تكون $f''_{x,z}$ متجانسة إيجابياً من المرتبة الثانية يجب أن يكون: $f''_{x,z}(\lambda\xi) = \lambda^2 f''_{x,z}(\xi)$.

وذلك مهما يكن $\lambda > 0$, الآن من أجل كل $\lambda > 0$ نجد :

$$(\Delta_t^2 f)_{x,z}(\lambda\xi) = \frac{1}{t^2}\{f(x+\lambda t\xi) - f(x) - t\langle z,\lambda\,\xi\rangle\};\ \forall t > 0, \forall \xi \epsilon E$$

وبفرض أن $\eta = \lambda t$ نجد أن:

$$(\Delta_t^2 f)_{x,z}(\lambda\xi) = \frac{\lambda^2}{\eta^2}\{f(x+\eta\xi) - f(x) - \eta\langle z,\xi\rangle\} = \lambda^2 (\Delta_\eta^2 f)_{x,z}(\xi)$$

وبمراعاة المبرهنة1.58 سنجد أن:

$$\lambda^2 f''_{x,z}(\xi) = \iota_s - \lim_n \left(\lambda^2 (\Delta_{\eta_n}^2 f)_{x,z}(\xi)\right)$$
$$= \tau_s - \lim_n \left((\Lambda_{t_n}^2 f)_{x,z}(\lambda\xi)\right) = f''_{x,z}(\lambda\,\xi)$$

(2) نلاحظ بدايةً أن: $(\Delta_t^2 f)_{x,z}(0) = 0$ مهما يكن $0 < t$.

الآن و نتيجةً لتقارب متتالية الدوال $(\Delta_{t_n}^2 f)_{x,z}$ من الدالة $f''_{x,z}$ لكل $(t_n \to 0)$ سنجد باستخدام المبرهنة 1.57 أن:

$$f''_{x,z}(0) \leq (\Delta_{t_n}^2 f)_{x,z}(0) = 0$$

وذلك من أجل n كبيرة بشكل كافٍ , الأمر الذي يعني أن :

$f''_{x,z}(0) \leq 0$ وأن $f''_{x,z}$ ذات قيمة محدودة من الأعلى عند الصفر (بالطبع ذات قيمة محدودة عند الصفر من الأدنى لأنها فعلية).

من جهة أخرى لكون $f''_{x,z}$ متجانس إيجابياً من المرتبة الثانية سنجد أن:

$$f''_{x,z}(0) = f''_{x,z}(\lambda.0) = \lambda^2 f''_{x,z}(0)$$

الأمر الذي يعني أن $f''_{x,z}(0) = 0$. ■

مبرهنة 3.3:

لنفترض أن f قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق سلايس في نقطة x بالنسبة إلى $z \in E^*$ عندئذ فإن $z \epsilon \partial f(x)$ علاوةً على ذلك فإن:

$$f''_{x,z}(\xi) \geq 0 : \forall \xi \epsilon \mathrm{E}$$

$$0 = \min_{\xi \epsilon \mathrm{E}}\{f''_{x,z}(\xi)\}$$

$0 \in \partial f''_{x,z}(0) \leftarrow$ (الدالة الصفرية).

إثبات :

لنفترض جدلاً أن : $z \notin \partial f(x)$ عندئذ فبحسب المبرهنة 2.7 سيكون:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \xi \in B(x, \varepsilon) : f(\xi) < f(x) + \langle z, \xi - x \rangle$$

ويكافئ هذا الكلام أنه توجد متتالية (ξ_n) من نقاط E متقاربة من الصفر بحيث أن:

$$f(x + \xi_n) - f(x) - \langle z, \xi_n \rangle = \alpha_n < 0 \qquad (3.1)$$

وبوضع:

$$\varphi(\xi) = f(x + \xi) - f(x) - \langle z, \xi \rangle$$

نجد أن φ نصف مستمرة من الأدنى .

كما أن : $\varphi(0)=0$ وبالتالي فإن:

$$0 = \varphi(0) \le \lim_{n\to\infty} \inf\varphi(\xi_n) = \lim_{n\to\infty} \inf(f(x+\xi_n) - f(x) - \langle z, \xi_n \rangle)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \inf(\alpha_n) \le \lim_{n\to\infty} \sup(\alpha_n) \le 0$$

وهذا يعني أن:

$$\lim_{n\to\infty} \inf(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} \sup(\alpha_n) = 0$$

وبالتالي فإن:
$$\lim_{n\to\infty} (\alpha_n) = 0$$

ونتيجةً لذلك يمكننا أن نفترض أن: $0 > \alpha_n > -1$ وذلك من أجل n كبيرة بقدر كاف.

من جهة أخرى فإن الدالة : φ محدبة بوضوح وبالتالي بأخذ المتتالية (ξ_n) والمحققة للعلاقة (3.1) وبأخذ n كبيرة بقدر كاف نجد أن:

$$\varphi(-\alpha_n \xi_n) = \varphi(-\alpha_n\xi_n + (1+\alpha_n)(0)) \le$$
$$-\alpha_n\varphi(\xi_n) + (1+\alpha_n)\varphi(0) = -\alpha_n \varphi(\xi_n) = -\alpha_n{}^2$$

الآن نتيجةً لتقارب متتالية الدوال $(\Delta^2_{t_n} f)_{x,z}$ من الدالة $f''_{x,z}$ (مهما تكن $(t_n \to 0)$) سنجد باستخدام المبر هنة 1.57 وبأخذ المتتالية: (ξ_n) المتقاربة من الصفر و المحققة للعلاقة (3.1) وبأخذ أن: $0 < (t_n) = (-\alpha_n) \to 0$

$$0 = f''_{x,z}(0) \le \lim_{n\to\infty} \inf (\Delta^2_{-\alpha_n} f)_{x,z}(\xi_n) = \lim_{n\to\infty} \inf \frac{f(x-\alpha_n\xi_n) - f(x) + \alpha_n\langle z,\xi_n\rangle}{(-\alpha_n)^2}$$
$$\lim_{n\to\infty} \inf\frac{\varphi(-\alpha_n\xi)}{(-\alpha_n)^2} < \lim_{n\to\infty} \inf\frac{-\alpha_n{}^2}{\alpha_n{}^2} = -1$$

أي أن: $0 = f''_{x,z}(0) \le -1$ وهذا تناقض وسببه فرضنا الجدلي أن $z \notin \partial f(x)$ وهذا يعني أن $z \epsilon \partial f(x)$.

أما الآن فلنبرهن أن $\forall \xi \epsilon \mathrm{E}$: $f''_{x,z}(\xi) \ge 0$:

لقد برهنا منذ قليل أنه إذا كانت f قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق سلايس في نقطة x من E بالنسبة إلى $z \in E^*$ فإن $z\epsilon\partial f(x)$ ونتيجةً لذلك فإن:

$$f(x+t\xi) \ge f(x) + t\langle z,\xi\rangle$$

الأمر الذي يعني أن:

$$(\Delta^2_t f)_{x,z}(\xi) \ge 0: \ \forall\xi\epsilon \mathrm{E}$$

الآن بحسب الشرط الثاني من تقارب سلايس فإنه من أجل كل نقطة $\xi \epsilon \mathrm{E}$ يوجد متتالية (ξ_n) من نقاط E متقاربة من ξ بحيث أن:

$$f''_{x,z}(\xi) = \lim_{n\to\infty} (\Delta^2_{t_n} f)_{x,z}(\xi_n) \ge 0$$

وذلك من أجل كل $0 < t_n \to 0$ الأمر الذي سيؤدي مباشرةً إلى أن:

$$f''_{x,z}(\xi) \ge 0$$

وبمراعاة المبرهنة 3.2 , (أي $f''_{x,z}(0) = 0$) نجد مباشرةً أن:

$$0 = \min_{\xi \in E}\{f''_{x,z}(\xi)\}$$

وبالتالي فإن :

$$f''_{x,z}(\xi) \geq f''_{x,z}(0) + \langle O, \xi - 0 \rangle$$

وبالتالي فإن : $O \in \partial f''_{x,z}(0)$ وهو المطلوب . ■

نتيجة 3.4:

إذا كانت $z \in E^*$, $z \notin \partial f(x)$ عندئذ فإن f غير قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق سلايس في النقطة x من E بالنسبة إلى z .

تعريف 3.5:

ليكن E فضاءً خطياً منظماً ما ولتكن $f: E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ أحد الدوال التي تنتمي إلى $\Gamma(E)$ عندئذ :

(1) نقول إن f قابلة للاشتقاق وفق سلايس مرتين في نقطة x من E إذا كان $\partial f(x) \neq \emptyset$ وكانت f قابلة للاشتقاق وفق سلايس مرتين في النقطة x بالنسبة لكل دالة z حيث أن : $z \in \partial f(x)$.

(2) نقول إن f قابلة للاشتقاق وفق سلايس مرتين دون أن نشير إلى أية نقطة x من E إذا كان من أجل كل نقطة x من E أن f قابلة للاشتقاق وفق سلايس مرتين في النقطة x .

2–العلاقة بين المشتق وفق سلايس من المرتبة الثانية ومشتق فريشيه من المرتبة الثانية

ليكن E, F فضائين خطيين منظمين كيفيين وليكن $f: E \to F$ مؤثراً ما ,سنعرف أولاً كلاً من مشتقي كاتو و فريشيه من المرتبة الثانية و سنبين العلاقة فيما بينهما :

لتكن x نقطة من E و لنفترض أن f قابل للاشتقاق وفق كاتو من المرتبة الأولى في مجاورة U للنقطة x , عندئذ يمكننا تعريف $g: U \mapsto L(E,F), g(v) = f'(v), \forall v \in U$ حيث $L(E,F)$ فضاء كل المؤثرات الخطيةو المستمرة المعرفة على E وتأخذ قيمها في F .

إن مشتق كاتو في x للدالة g إن كان موجوداً سيكون مؤثراً خطياً مستمراً :

$$g'(x)\xi = \lim_{t \to 0} \frac{g(x+t\xi) - g(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f'(x+t\xi) - f'(x)}{t}$$

إن النهاية الناتجة ستكون مؤثراً من $L(E,F)$ وليس نقطة من F , وسنصطلح على أن $g'(x)\xi = f''(x)\xi$ ونسمي مؤثر النهاية بمشتق كاتو من المرتبة الثانية في x وقد برهن أنه مؤثر ثنائي الخطية ومستمر على E , كما برهن أنه من أجل كل ξ من E فإن:

$$(f''(x)(\xi))(\xi) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t\xi)-f(x)-tf'(x)(\xi)}{t^2/2}$$

وهذا ما نجده في[8],[15]وأيضاً يمكننا أن نرى ذلك في المرجعين [11],[7] .

مشتق فريشيه من المرتبة الثانية :

كما في مشتق كاتو من المرتبة الثانية وفي نفس المراجع يبرهن أن:

لتكن x نقطة من E , و لنفترض أن f قابل للاشتقاق وفق فريشيه من المرتبة الأولى في مجاورة للنقطة x , عندئذ نقول إن f فريشيه تفاضلي من المرتبة الثانية في x إذا كان يوجد مؤثر مستمر وثنائي الخطية معرف على E ويأخذ قيمه في F (وسنرمز له بالرمز: $(D^2f(x)\xi)$) بحيث يحقق الخاصية التالية:

$$\lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{\| f(x+\xi)-f(x)-Df(x)(\xi)-\frac{1}{2}(D^2f(x)\xi)\xi \|}{\|\xi\|^2} = 0$$

عندئذ فإن $D^2f(x)$ يسمى بمشتق فريشيه من المرتبة الثانية للدالة f في x .

وبواسطة هذا التعريف نجد علاقة تايلور من المرتبة الثانية:

$$f(x+\xi) = f(x) + Df(x)(\xi) + \frac{1}{2}(D^2f(x)\xi)\xi + o(\|\xi\|^2)$$

حيث أن:

$$\lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{o(\|\xi\|^2)}{\|\xi\|} = \lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{\|f(x+\xi)-f(x)-Df(x)(\xi)-\frac{1}{2}(D^2f(x)\xi)\xi\|}{\|\xi\|^2} = 0$$

ومن الملاحظ أنه إذا كان fقابلاً للاشتقاق وفق فريشيه مرتين في x عندئذ فإن f قابل للاشتقاق وفق كاتو مرتين في x والمشتقان متساويان , وذلك لأنه :

بما أن f قابل للاشتقاق وفق فريشيه مرتين في x عندئذ فإن:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|f(x+t\xi)-f(x)-tDf(x)(\xi)-\frac{1}{2}t^2(D^2f(x)\xi)\xi\|}{t^2\|\xi\|^2} = 0$$

وذلك مهما تكن $\xi \in E/\{0\}$, الأمر الذي يقتضي أن:

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2} \| f(x+t\xi) - f(x) - tDf(x)(\xi) - \frac{1}{2}t^2(D^2f(x)\xi)\xi \| - 0$$

وبالتالي فإن:

$$\| \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t\xi)-f(x)-tDf(x)(\xi)}{t^2} - \frac{1}{2}(D^2f(x)\xi)\,\xi \,\| = 0$$

الأمرالذي سيؤدي مباشرةً إلى أن :

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+t\xi)-f(x)-tDf(x)(\xi)}{\frac{1}{2}t^2} = (D^2f(x)\xi)\,\xi \qquad \blacksquare$$

<u>مبرهنة 3.6:</u>

ليكن E فضاءً خطياً منظماً ما ولتكن $f: E \to \mathbb{R}$ أحد الدوال المحدبة والقابلة للاشتقاقوفق فريشيه من المرتبة الثانية في مجاورة لنقطة x من E , عندئذ فإن الدالة:

$$\varphi(\xi) - \frac{1}{2}\langle D^2f(x)\xi, \xi \rangle$$

ستحقق ما يلي:

(1) φ موجبة ومستمرة.

(2) φ محدبة ونصف مستمرة من الأدنى بضعف ولكنها ليست نصف مستمرة من الأعلى بضعف عموماً .

<u>إثبات :</u>

(1) بمراعاة أن مشتق فريشيه في حال كان موجوداً (من المرتبتين الأولى والثانية) يساوي مشتق كاتو فإن:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+t\xi)-f(x)-t\langle Df(x),\xi\rangle}{\frac{1}{2}t^2} = \langle D^2f(x)\xi, \xi \rangle$$

وبمراعاة المبرهنة 1.18 فإن:

$$f(x+t\xi) - f(x) - t\langle Df(x),\xi\rangle > 0$$

وبالتالي فإن : $\varphi(\xi) \geq 0$, أما استمرارية φ فهذا ناتج من كون المشتق وفق فريشيه من المرتبة الثانية مستمر .

(2) لنبرهن أولاً أن φ محدبة:

لتكن $\alpha \in [0,1]$ ولتكن : $\xi, u \in E$ عندئذٍ فإن:

$$f(x + t(\alpha\xi + (1-\alpha)u)) = f(\alpha(x+t\xi) + (1-\alpha)(x+tu))$$

$$\leq \alpha f(x+t\xi) + (1-\alpha)f(x+tu)$$

لذلك فإن:

$$\frac{f\left(x+t(\alpha\xi+(1-\alpha)u)\right)-f(x)-t\langle Df(x),\alpha\xi+(1-\alpha)u\rangle}{\frac{t^2}{2}}$$

$$\leq \frac{\alpha f(x+t\xi)-\alpha f(x)-t\alpha\langle Df(x),\xi\rangle}{\frac{t^2}{2}}+\frac{(1-\alpha)f(x+tu)-(1-\alpha)f(x)-(1-\alpha)t\langle Df(x),u\rangle}{\frac{t^2}{2}}$$

وبأخذ نهاية الطرفين ومراعاة أن مشتق فريشيه في حال كان موجوداً (من المرتبتين الأولى والثانية) يساوي مشتق كاتوفإننا سنجد مباشرةً أن φ محدبة .

الآن بما أن φ محدبة ومستمرة فإنه بحسب المبرهنة 1.14 فإن φ نصف مستمرة من الأدنى بضعف.

كي نثبت أن φ ليست نصف مستمرة من الأعلى بضعف بالضرورة , سوف نأخذ المثال التالي:

ليكن E فضاء هلبرت , ولتكن $f:E \to \mathbb{R}$ معرف بالشكل:

$$f(x)=\frac{1}{2}\|x\|^2=\frac{1}{2}\langle x,x\rangle$$

عندئذ فإن f قابل للاشتقاق وفق فريشيه حتى المرتبة الثانية مع $\langle Df(x),\xi\rangle=\langle x,\xi\rangle$ و :

$$\varphi(\xi)=\frac{1}{2}\|\xi\|^2$$

وذلك لأن:

$$\lim_{\|\xi\|\to 0}\frac{|f(x+\xi)-f(x)-\langle Df(x),\xi\rangle|}{\|\xi\|}=\lim_{\|\xi\|\to 0}\frac{|\frac{1}{2}\langle x+\xi,x+\xi\rangle-\frac{1}{2}\langle x,x\rangle-\langle x,\xi\rangle|}{\|\xi\|}=\lim_{\|\xi\|\to 0}\frac{\frac{1}{2}\|\xi\|^2}{\|\xi\|}=0$$

كما أن :

$$\lim_{\|\xi\|\to 0}\frac{\left|f(x+\xi)-f(x)-\langle Df(x),\xi\rangle-\frac{1}{2}\langle D^2f(x)\xi,\xi\rangle\right|}{\|\xi\|^2}$$

$$=\lim_{\|\xi\|\to 0}\frac{|\frac{1}{2}\langle x+\xi,x+\xi\rangle-\frac{1}{2}\langle x,x\rangle-\langle x,\xi\rangle-\frac{1}{2}\|\xi\|^2|}{\|\xi\|^2}=0$$

من جهة أخرى , لتكن (e_n) متتالية متعامدة منظمة في E عندئذ فإن (e_n) متقاربة بضعف من الصفر, وسيكون لدينا:

$$\limsup_{n\to\infty}\varphi(e_n)=\frac{1}{2}>0=\varphi(0)$$

الأمر الذي يعني أن φ ليست نصف مستمرة من الأعلى بضعف في الصفر, وهو المطلوب. ■

مبرهنة 3.7:

ليكن E فضاءً خطياً منظماً ما ولتكن $f: E \to \mathbb{R}$ أحد الدوال المحدبة والقابلة للاشتقاق وفق فريشيه من المرتبة الثانية في مجاورة لنقطة x من E , عندئذ فإن f قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الثانية في x بالنسبة إلى $z = Df(x)$ والمشتق من المرتبة الثانية وفق سلايس :

$$f''_{x,z}(\xi) = \frac{1}{2}\langle D^2 f(x)\xi, \xi \rangle$$

<u>إثبات :</u>

بدايةً لنضع $\varphi(\xi) = \frac{1}{2}\langle D^2 f(x)\xi, \xi \rangle$

بواسطة علاقة تايلور من المرتبة الثانية نستطيع أن نكتب:

$$f(x+t\xi) - f(x) - t\langle Df(x), \xi\rangle = \frac{1}{2}t^2\langle D^2 f(x)\xi, \xi \rangle + o(t \parallel \xi \parallel^2)$$

حيث أن: $\lim\limits_{t\to 0} \frac{o(t\|\xi\|^2)}{t^2} = 0$

ومن علاقة تايلور السابقة نجد أن:

$$(\Delta_t^2 f)_{x,Df(x)}(\xi) = \frac{1}{2}\langle D^2 f(x)\xi, \xi \rangle + \frac{o(t\|\xi\|^2)}{t^2}$$

لنثبت الآن أن $(\Delta_t^2 f)_{x,Df(x)}$ تتقارب وفق سلايس من φ .

1) لتكن $(y,\eta) \in epi(\varphi^*)$ مع $\varphi^*(y) < \eta$ (وبالتالي $\langle y,\xi\rangle - \eta < \varphi(\xi)$ وذلك من أجل كل $\xi \in E$) ولتكن (ξ_n) متتالية محدودة كيفية من نقاط E عندئذ :

بما أن: $\frac{o(t_n\|\xi\|^2)}{{t_n}^2}$ لا متناهي في الصغر فإنه من الواضح أن:

$$(\Delta_{t_n}^2 f)_{x,Df(x)}(\xi_n) = \frac{1}{2}\langle D^2 f(x)\xi_n, \xi_n\rangle + \frac{o(t_n\|\xi_n\|^2)}{{t_n}^2} > \langle y, \xi_n\rangle - \eta.$$

2) لتكن $\xi \in E$ نقطة كيفية , ولتكن (ξ_n) متتالية من نقاط E متقاربة من ξ عندئذ:

$$\lim_{n\to\infty}(\Delta_{t_n}^2 f)_{x,Df(x)}(\xi_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\langle D^2 f(x)\xi_n, \xi_n\rangle + \lim_{n\to\infty}\frac{o(t_n\|\xi_n\|^2)}{{t_n}^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(\xi_n) = \varphi(\xi)$$

وذلك لأن φ دالة مستمرة , وهو المطلوب . ■

لاحظ أن الشرط الثاني من تقارب سلايس في المبرهنة السابقة قد تحقق من أجل أي متتالية (ξ_n) من نقاط E متقاربة من ξ في حين يكفي لتحققه أن تتقارب متتالية واحدة.

3- العلاقة بين مشتق دالة وفق سلايس وبين مشتق مرافقتها

نظرية 3.8 (المرافق):

a) $z \in \partial f(x) \Leftrightarrow x \in \partial f^*(z)$

b) $z \in \partial f(x) \longrightarrow (\Delta_t^2 f)^*{}_{x,z} - (\Delta_t^2 f^*)_{z,x}$

c) الدوال $(\Delta_t^2 f)_{x,z}$ تتقارب وفق سلايس من الدالة $f''_{x,z}$ إذا وفقط إذا تقاربت متتالية الدوال $(\Delta_t^2 f^*)_{z,x}$ من $(f^*)''_{z,x}$, وسيكون:

$$(f''_{x,z})^* = (f^*)''_{z,x}$$

إثبات :

a) نعلم أن: $z \in \partial f(x) \Leftrightarrow f(x) + f^*(z) = \langle z, x\rangle$ وبحسب المبرهنة 1.29 فإن:

$f = f^{**}$ وبالتالي فإن :

$$f^{**}(x) + f^*(z) = \langle z, x\rangle$$

وبالتالي فإن : $x \in \partial f^*(z)$.

b) إن :

$$(\Delta_t^2 f)^*{}_{x,z}(\xi^*) = sup_{\xi\epsilon E}\{\langle \xi^*,\xi\rangle - \left(\Delta_t^2 f\right)_{x,z}(\xi)\} =$$

$$= sup_{\xi\epsilon E}\ \{\ \langle \xi^*,\xi\rangle - \tfrac{1}{t^2}\ \{f(x+t\xi) - f(x) - t\langle z,\xi\rangle\ \}\ \}$$

وبفرض أن: $u = x + t\xi$ فإن:

$$(\Delta_t^2 f)^*{}_{x,z}(\xi^*) = sup_{u\epsilon E}\{\langle \xi^*, \tfrac{u-x}{t}\rangle - \tfrac{1}{t^2}\{f(u) - f(x) - \langle z, u-x\rangle\}\}$$

$$= \tfrac{1}{t^2} sup_{u\epsilon E}\{t\langle \xi^*, u\rangle - t\langle \xi^*, x\rangle - \{f(u) + f^*(z) - \langle z, u\rangle\}\}$$

وذلك لكون $f(x) + f^*(z) - \langle z, x\rangle$ لأن $z \in \partial f(x)$.

بالمتابعة نجد أن:

$$(\Delta_t^2 f)^*{}_{x,z}(\xi^*) - \tfrac{1}{t^2}\{sup_{u\epsilon E}(\ \langle t\xi^* + z, u\rangle - f(u)\ ) - f^*(z) - t\langle \xi^*, x\rangle\}$$

$$= \tfrac{1}{t^2}\{\ f^*(z + t\xi^*) - f^*(z) - t\langle \xi^*, x\rangle\} = (\Delta_t^2 f^*)_{z,x}$$

c) بحسب النتيجة 1.52 فإن الدوال $(\Delta_t^2 f)_{x,z}$ ستتقارب وفق سلايس من الدالة $f''_{x,z}$ إذا وفقط إذا تقاربت الدوال$(\Delta_t^2 f)^*{}_{x,z}$ من $(f''_{x,z})^*$, وبحسب $b)$ من المبرهنة الحالية فإن:

$$(\Delta_t^2 f)^*{}_{x,z} - (\Delta_t^2 f^*)_{z,x}$$

حيث أن تقارب سلايس للدوال$(\Delta_t^2 f)_{x,z}$ من الدالة $f''_{x,z}$ سوف يضمن أن $z \in \partial f(x)$.

لكن الدوال $(\Delta_t^2 f^*)_{z,x}$ ستتقارب من $(f^*)''_{z,x}$ وبالتالي فإن الدوال $(\Delta_t^2 f)^*{}_{x,z}$ ستتقارب أيضاً من $(f^*)''_{z,x}$ وهذا يبين تحقق (c) . ■

<u>نتيجة 3.9:</u>

1) f قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الثانية في نقطة x من E بالنسبة إلى $z \in E^*$ إذا وفقط إذا كانت f^* قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الثانية في z بالنسبة إلى x .

2) f قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الثانية إذا وفقط إذا كانت f^* قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الثانية .

4– دراسة قابلية اشتقاق دالة من الشكل $f \circ A$ حيث A مؤثر خطي إيزومومرفيزم و f دالة قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الثانية

<u>مبرهنة 3.10:</u>

ليكن X , E فضائين خطيين منظمين وليكن $A : X \to E$ مؤثراً خطياً إيزومور فيزم ولتكن $f : E \to R \cup \{+\infty\}$ دالة تنتمي إلى $\Gamma(E)$ وليكن $x \in X$ ولنفترض أنَّ $\partial f\left(A(x)\right) \neq \phi$ وليكن $z \in \partial f\ (Ax)$ عندئذٍ :

1) العنصر $A^* z$ من X^* المعرَّف بالشكل $\langle A^* z , \xi \rangle = \langle z , A\xi \rangle$ هو عنصر من $\partial(f \circ A)(x)$.

2) إذا كانت f قابلةً للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق سلايس في Ax بالنسبة إلى z فإن $f \circ A$ قابلة للاشتقاق وفق سلايس في x بالنسبة إلى $A^* z$ مع :

$$\left(f \circ A\right)''_{x,A^* z}\left(\xi\right) = f''_{Ax,z}\left(A\xi\right) = \left(f''_{Ax,z} \circ A\right)(\xi)$$

<u>إثبات :</u>

1) من أجل كل z من $\partial f\ (Ax)$ سيكون لدينا :

$$f(\xi') \geq f(Ax) + \langle z, \xi' - Ax \rangle, \forall \xi' \in E$$

وبما أنَّ A إيزومورفيزم عندئذٍ يوجد $\xi \in X$ بحيث أنَّ $A\xi = \xi'$ وبالتالي :

$$(f \circ A)(\xi) \geq (f \circ A)(x) + \langle z, A\xi - Ax \rangle$$

$$= (f \circ A)(x) + \langle z, A(\xi - x) \rangle$$

$$= (f \circ A)(x) + \langle A^* z, \xi - x \rangle$$

وبالتالي فإن $$A^* z \in \partial (f \circ A)(x)$$

2) لنفرض أنَّ f قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق سلايس في Ax بالنسبة إلى z ولنبين أن $\left(\Delta_{t_n}^2 (f \circ A)\right)_{x,A^*z}$ ستتقارب وفق سلايس من $f''_{Ax,z} \circ A$, من أجل ذلك لنأخذ أي متتالية محدودة (ξ_n) من نقاط X وليكن:

$$(y,\eta) \in epi(f'' \circ A)^* \; with (f'' \circ A)^* (y) < \eta$$

عندئذ فإن:

$$\langle y, \xi_n \rangle - \eta < (f''_{Ax,z} \circ A)(\xi_n) = f''_{Ax,z}(A\xi_n)$$ مهما يكن n

وبالتالي وبحسب المبرهنة 1.57 يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث أنَّ :

$$\left(\Delta_{t_n}^2 f\right)_{Ax,z} (A\xi_n) > \langle y, \xi_n \rangle - \eta \; ; \quad \forall n > n_0$$

ومنه

$$\left(\Delta_{t_n}^2 (f \circ A)\right)_{x,A^*z} (\xi_n) > \langle y, \xi_n \rangle - \eta$$

حيث أنَّ :

$$\left(\Delta_t^2 f\right)_{Ax,z} (A\xi) = \frac{f(Ax + t.A\xi) - f(Ax) - t\langle z, A\xi \rangle}{t^2}$$

$$= \frac{(f \circ A)(x + t\xi) - (f \circ A)(x) - t\langle A^* z, \xi \rangle}{t^2} = \left(\Delta_t^2 (f \circ A)\right)_{x,A^*z} (\xi)$$

إذاً الشرط الأول من تقارب سلايس محقق .

لإثبات تحقق الشرط الثاني فإنه بما أن f قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق سلايس في Ax بالنسبة إلى z فإنَّه من أجل أيّ $\xi \in X$ يوجد $(\xi'_n) = (A\xi_n)$ متقاربة من $\xi' = A\xi$ بحيث أنَّ :

$$(f''_{Ax,z} \circ A)(\xi) = \lim_{n \to \infty} \left(\Delta_{t_n}^2 f\right)_{Ax,z} (A\xi_n) = \lim_{n \to \infty} \left(\Delta_{t_n}^2 (f \circ A)\right)_{x,A^*z} (\xi_n)$$

تحقق الشرطان $(s_1),(s_2)$ يعني أنَّ $(f \circ A)$ قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الثانية في x بالنسبة إلى $A^* z$. وهو المطلوب. ■

5- العلاقة بين المشتقين من المرتبة الأولى والثانية وفق سلايس

مبرهنة 3.11:

لنفرض أنَّ f قابلة للاشتقاق من المرتبتين الأولى و الثانية وفق سلايس في x بالنسبة إلى $z \in E^*$ ولنفرض أن $f''_{x,z}(\xi) < +\infty$ من أجل إحدى النقاط $\xi \in E$ عندئذٍ :

$$f'_x(\xi) = \langle z, \xi \rangle$$

إثبات :

بما أن f قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق سلايس في x بالنسبة إلى z فإنَّ $(\Delta^2_t f)_{x,z}$ متقاربة وفق سلايس من $f''_{x,z}$ وبحسب الشرط الثاني من تقارب سلايس فإنَّه من أجل كل $\xi \in E$ توجد متتالية (ξ_n) متقاربة من ξ بحيث أنَّ :

$$f''_{x,z}(\xi) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x+t_n\xi_n) - f(x) - t_n\langle z, \xi_n\rangle}{t_n^2} < +\infty$$

ومنه :

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(x+t_n\xi_n)-f(x)}{t_n} - \langle z,\xi_n\rangle\right] = 0$$

بالتالي ينتج أنَّ

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{f(x+t_n\xi_n)-f(x)}{t_n}\right] = \langle z,\xi\rangle$$

وبما أنَّ f قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الأولى فإنَّه من أجل (ξ_n) المتتالية السابقة المتقاربة من ξ وبحسب المبرهنة 1.57 نحصل على :

$$f'_x(\xi) \le \liminf_{n\to\infty}(\Delta_{t_n} f)_x(\xi_n) = \lim_{n\to\infty}(\Delta_{t_n} f)_x(\xi_n) = \langle z,\xi\rangle$$

أي أنَّ :

$$f'_x(\xi) \le \langle z,\xi\rangle \qquad (3.2)$$

من جهةٍ أخرى وبحسب المبرهنة3.3 فإن $z \in \partial f(x)$ لأن f قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الثانية لذلك فإنه بحسب المبرهنة 2.8 سنجد أن :

$$f'_x(\xi) \ge \langle z,\xi\rangle \qquad (3.3)$$

من (3.3) و (3.2) نحصل على $f'_x(\xi) = \langle z,\xi\rangle$. وهو المطلوب . ■

نتيجة 3.12:

$$f''_{x,z}(\xi)=\begin{cases}\tau_s-\lim\limits_{t\downarrow 0}\left[\dfrac{f(x+t\xi)-f(x)-tf'_x(\xi)}{t^2}\right] & if\ \langle z,\xi\rangle=f'_x(\xi)\\ +\infty & if\ \langle z,\xi\rangle<f'_x(\xi)\end{cases}$$

إثبات :

إذا كان $\langle z,\xi\rangle<f'_x(\xi)$ من أجل إحدى النقاط ξمن E فإنَّه من أجل كل متتالية (ξ_n) من نقاط E متقاربة من ξ سيكون $f'_x(\xi)\le\liminf\limits_{n\to\infty}\left(\Delta_{t_n}f\right)_x(\xi_n)$. وبالتالي فإن

$$\langle z,\xi\rangle\le\liminf\limits_{n\to\infty}\left(\Delta_{t_n}f\right)_x(\xi_n)$$

وهذا بدوره يؤدي إلى أن :

$$\liminf_{\substack{n\to\infty\\ t_n\to 0}}\left[\frac{f(x+t_n\xi)-f(x)}{t_n}-\langle z,\xi_n\rangle\right]>0$$

الأمر الذي يعني أنّ : $f''_{x,z}(\xi)=+\infty$ ■

مثال :

لتكن $f:E\to\mathbb{R}$ دالة محدبة ونصف مستمرة من الأدنى ومتجلسة إيجابياً من المرتبة الثانيةعندئذ فإن :

$$\left(\Delta^2{}_t f\right)_{0.O}(\xi)=\frac{t^2f(\xi)}{\frac{1}{2}t^2}=\frac{1}{2}f(\xi)\ \ ,\left(\Delta_t f\right)_0(\xi)=tf(\xi)\ \ ,\ f(0)=0\ \ ,$$

$$\frac{1}{2}f=\tau_s-\lim_{t\to 0}\left(\Delta^2{}_t f\right)_{0.O}$$

وبسهولة سنجد أن $O=\tau_s-\lim\limits_{t\to 0}\left(\Delta_t f\right)_0$

وهذا يتطابق مع ما يمكن أن نحصل عليه من المبرهنة 3.11 حيث أنناسنجد مباشرةً أن :

$$.\ f'_x(\xi)=\langle O,\xi\rangle=0\ ,\forall\xi\in E.$$

الفصل الرابع

مشتقات المؤثرات المتعددة القيم

Multifunctions derivatives

سنعتبر أن E,F فضاءان خطيان منظمان,و أن $\gamma: E \rightrightarrows F$ تطبيق متعدد القيم و أنه من أجل x من E يكون: $\gamma(x) \neq \emptyset$, $z \in \gamma(x)$.

1 . بروتو – مشتق ($proto-derivative$) للمؤثرات المتعددة القيم وخواصه

<u>تعريف 4.1:</u>

لتكن نسب المؤثرات المتعددة القيم التفاضلية :

$$(\Delta_t\gamma)_{x,z}(\xi) = \frac{1}{t}\{\gamma(x+t\xi) - z\}; \forall t > 0, \forall \xi \epsilon \mathrm{E}$$

إذا كان بيان $(\Delta_t\gamma)_{x,z}$ كعائلة من المجموعات الجزئية في $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ تتقارب وفق مفهوم كوراتوسكي القوي (عندما $t \to 0$) من مجموعة أخرى في $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ عندئذ سنقول إن γ بروتو– قابل للاشتقاق في x بالنسبة إلى z . وستكون النهاية بياناً لتطبيق متعدد القيم آخر : $\gamma'_{x,z} : E \rightrightarrows F$ والذي سنسميه بروتو– مشتق للتطبيق γ في x بالنسبة إلى z .

<u>ملاحظة :</u>

لقد بين أتوش ([1]) أن مفهوم كوراتوسكي القوي لتقارب متتالية كل حد من حدودها بيان لمؤثر مطرد أعظمي يتطابق مع مفهوم التقارب بيانياً لمتتالية المؤثرات تلك , حيث أننا :

1. نقول عن مؤثر $A: E \to E^*$ أنه مطرد إذا تحقق الآتي :

   من أجل كل x_1, x_2 من ساحة A فإن :

$$\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0$$

2. نقول عن المؤثر المطرد أنه أعظمي إذا كان بيانه غير محتوى في بيان أي مؤثر مطرد آخر.
3. نقول عن متتالية من المؤثرات المطردة الأعظمية $\{A_n: E \to E^*, n \in \mathbb{N}\}$ أنها متقاربة بيانياً من المؤثر المطرد الأعظمي $A: E \to E^*$ إذا وفقط إذا كان من أجل كل (x,z) من $gph(A)$ توجد متتالية $\{(x_n,z_n) \in gph(A_n), \forall n \in \mathbb{N}\}$ بحيث أن : $x_n \to x$, $z_n \to z$

لقد بين روكافيلر (3.25 , [10]) أنه عندما يكون E فضاء باناخ و $f \in \Gamma(E)$ فإن المؤثر $\partial f: E \to E^*$ هو مؤثر مطرد أعظمي .

كما قد بين أنه إذا تقاربت المتتالية $(\partial f_n)_n$ من مؤثر مطرد أعظمي T حيث أن $f_n \in \Gamma(E)$, E فضاء باناخ , فإن T= ∂f حيث أن $f \in \Gamma(E)$.

ملاحظة 4.2:

من التعريف نجد أن بيان $(\Delta_t\gamma)_{x,z}$ يساوي:

$$gph(\Delta_t\gamma)_{x,z} = \frac{1}{t}\{gph(\gamma) - (x,z)\}$$

وذلك لأن:

$$gph(\Delta_t\gamma)_{x,z} = \left(\xi, \frac{1}{t}\{\gamma(x+t\xi) - z\}\right) = \frac{1}{t}\{(t\xi, \gamma(x+t\xi) - z)\}$$
$$= \frac{1}{t}\{(\eta - x, \gamma(\eta) - z)\} : \eta = x + t$$
$$= \frac{1}{t}\{(\eta, \gamma(\eta)) - (x,z)\} = \frac{1}{t}\{gph(\gamma) - (x,z)\}$$

تعريف 4.3:

سنقول أن γ بروتو- قابل للاشتقاق في x (دون أن نشير إلى أي z) , إذا كان $\gamma(x) \neq \emptyset$ وكان من أجل كل $z \in \gamma(x)$ أن γ بروتو - قابل للاشتقاق في x بالنسبة إلى z .

مبرهنة 4.4:

لتكن: E_1, E_2, F_1, F_2 فضاءات منظمة وليكن $A = (A_1, A_2): E_1 \times F_1 \rightrightarrows E_2 \times F_2$ إيزومرفيزم خطي($A_1: E_1 \times F_1 \rightrightarrows E_2, A_2: E_1 \times F_1 \rightrightarrows F_2$) وليكن $\gamma: E_1 \rightrightarrows F_1$ تطبيق متعدد القيم, وليكن أيضاً $A\gamma : E_2 \rightrightarrows F_2$ تطبيق متعدد القيم آخر معرف بالشكل:

$$gph(A\gamma) = A[gph(\gamma)]$$

ولنفترض أن $\gamma(x) \neq \emptyset$ و $z \in \gamma(x)$ عندئذ فإن γ بروتو- قابل للاشتقاق في x بالنسبة إلى z إذا وفقط إذا كان $A\gamma$ بروتو -قابلاً للاشتقاق في $A_1(x,z)$ بالنسبة إلى $A_2(x,z)$ وسيكون :

$$A\gamma'_{x,z} = (A\gamma)'_{A_1(x,z), A_2(x,z)}$$

إثبات :

لدينا:

$$A[gph(\Delta_t\gamma)_{x,z}] = A\left[\frac{1}{t}\{gph(\gamma) - (x,z)\}\right] = \frac{1}{t}\{gph(A\gamma) - A(x,z)\}$$

وذلك لأن A خطي , وبالتالي فإن:

$$A[gph(\Delta_t\gamma)_{x,z}] = \frac{1}{t}\{gph(A\gamma) - (A_1(x,z), A_2(x,z))\} =$$
$$gph(\Delta_t(A\gamma))_{A_1(x,z),\, A_2(x,z)}$$

ولكون Aخطي وا يزومورفيزم (غامر ومتباين ويحافظ على المسافة) فإنه من أجل أية أسرة :

$\{D_t \subset E_1 \times F_1; t > 0\}$ فإن D_t تتقارب بقوة من $D \subset E_1 \times F_1$ وفق مفهوم كوراتوسكي القوي (عندما $t \to 0$) إذا وفقط إذا تقاربت الأسرة $\{AD_t \subset E_2 \times F_2\}$ من AD .

هنا $D_t = gph(\Delta_t \gamma)_{x,z}$ و :

$AD_t = A[gph(\Delta_t \gamma)_{x,z}] = gph(\Delta_t (A\gamma))_{A_1(x,z), A_2(x,z)}$, وهو المطلوب . ■

مبرهنة 4.5:

ليكن E, F فضائين خطيين منظمين, وليكن $\gamma: E \rightrightarrows F$ تطبيقاً متعدد القيم و لتكن x من E بحيث أن $\gamma(x) \neq \emptyset$ ولتكن $z \in \gamma(x)$, عندئذ فإن γ بروتو- قابل للاشتقاق في x بالنسبة إلى z إذا وفقط إذا كان γ^{-1} بروتو- قابل للاشتقاق في z بالنسبة إلى x وسيكون لدينا:

$$(\gamma^{-1})'_{z,x} = (\gamma'_{x,z})^{-1}$$

حيث أن γ^{-1} معرف بالشكل: $(x \in \gamma^{-1}(z) \Leftrightarrow z \in \gamma(x))$.

إثبات :

يتم الإثبات بتطبيق المبرهنة السابقة وذلك بأخذ : $A: E \times F \to F \times E$ حيث أن:

$$A_1(x,z) = z \;, A_2(x,z) = x \text{ و } A(x,z) = (z,x)$$

و $A\gamma$ سيكون معرف بالشكل:

$$gph(A\gamma) = A[gph(\gamma)] = A\{(x, \gamma(x))\} = A\{(x,z)\} = \{(z,x)\} =$$

$$= \{(z, \gamma^{-1}(z))\} = gph(\gamma^{-1})$$

أي أن $A\gamma = \gamma^{-1}$ وبالتالي بتطبيق المبرهنة 4.4 فإن: γ بروتو- قابل للاشتقاق في x بالنسبة إلى z إذا وفقط إذا كان $A\gamma = \gamma^{-1}$ بروتو- قابل للاشتقاق في z بالنسبة إلى x وسيكون لدينا:

$$(\gamma^{-1})'_{z,x} = (A\gamma)'_{z,x} = A\gamma'_{x,z} = (\gamma'_{x,z})^{-1} \, . \quad ■$$

2- العلاقة بين المشتق من المرتبة الثانية وفق سلايس لدالة من $\Gamma(E)$ وبين بروتو مشتق لتحت تفاضلها

للنظرية الآتية أهمية في دراسة مسائل القيم الدنيا وفي بحثنا سنقدم مثالاً على ذلك في دراستنا لدالة موريو يوشيدا .

نظرية 4.6:

ليكن E فضاء باناخ ما ولتكن $f: E \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ أحد الدوال التي تنتمي إلى $\Gamma(E)$ ولتكن x إحدى نقاط E ولنفترض أن f ذات قيمة محدودة في x عندئذ فإن الشرطين التاليين متكافئان :

a) f قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق سلايس في x بالنسبة إلى z .

b) $z\epsilon\partial f(x)$ و ∂f بروتو- قابل للاشتقاق في x بالنسبة إلى z و بروتو - مشتقه سيكون تحت التفاضل لدالة $\varphi \in \Gamma(E)$ تحقق أن $\varphi(0) = 0$ وسيكون:

$$\partial\left(f''_{x,z}\right) = (\partial f)'_{x,z}$$

إثبات :

أولاً سنذكر بالمبرهنة 1.47 (أتوش, بير):

ليكن E فضاء باناخ ولتكن: $\{\varphi_n, \varphi: E \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}, n \in \mathbb{N}\}$ متتالية من الدوال التي تنتمي إلى $\Gamma(E)$ عندئذ $\varphi = \tau_s - \lim_n \varphi_n$ إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان:

$$\partial\varphi = \lim_n \ \partial(\varphi_n) \quad (i)$$

$$\exists(u,z) \in gph\,(\partial\varphi), \exists(u_n,z_n) \in \partial(\varphi_n): (u_n,z_n) \to (u,z), \varphi_n(u_n) \to \varphi(u) \quad (ii)$$

الآن من أجل كل $t > 0$ سنضع: $\varphi_t(\xi) = (\Delta_t^2 f)_{x,z}(\xi)$ عندئذ فإن:

$$\partial\varphi_t(\xi) = \frac{1}{t}\{\,\partial f(x+t\xi) - z\} = (\Delta_t \partial f)_{x,z}(\xi) \qquad (4.1)$$

وذلك لأن:

$$\partial\varphi_t(\xi) = \{y \in E^*;\ \varphi_t(u) \geq \varphi_t(\xi) + \langle y, u-\xi\rangle, \forall u \in E\}$$

$$= \{y \in E^*; \frac{1}{t^2}\{f(x+tu) - t\langle z,u\rangle\} \geq \frac{1}{t^2}\{f(x+t\xi) - t\langle z,\xi\rangle\} + \langle y, u-\xi\rangle\}$$

$$= \{y \in E^*; f(x+tu) \geq f(x+t\xi) + \langle ty+z, tu-t\xi\rangle, \forall u \in E\}$$

$$= \{y \in E^*; ty+z \in \partial f(x+t\xi)\} = \left\{y \in E^*; y \in \frac{1}{t}\{\partial f(x+t\xi) - z\}\right\}$$

من جهة أخرى فإنه من الواضح أن:

$$\forall t > 0: \varphi_t(0) = 0 \qquad (4.2)$$

$$O \in \partial\varphi_t(0) \Leftrightarrow z \epsilon \partial f(x) \qquad (4.3)$$

الآن لنفترض أن a) صحيح أي أن f قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق سلايس في x بالنسبة إلى z , عندئذ بحسب المبرهنة 3.3 فإن $z \epsilon \partial f(x)$.

الآن بوضع $\varphi = f''_{x,z}$ فإنه من أجل كل $(0 < t_n \to 0)$ فإن φ_{t_n} تتقارب وفق سلايس من φ وبالتالي فإنه بحسب نظرية (أتوش- بير) السابقة فإن (i) صحيح وبالتالي فإن (4.1) ستقتضي أن $\partial\varphi_{t_n} = (\Delta_{t_n}\partial f)_{x,z}$ ستتقارب وفق مفهوم كوراتوسكي القوي من $\partial\varphi$ وسيكون لدينا نتيجةً لذلك وبحسب (i) أن :

$$\partial\left(f''_{x,z}\right) = \partial\varphi = (\partial f)'_{x,z}$$

من جهة أخرى فإن

$$\varphi(0) = f''_{x,z}(0) = 0 \quad \text{و} \quad \varphi = f''_{x,z} \in \Gamma(E)$$

وذلك بحسب المبرهنة 3.3 .

الآن لنفترض أن b) صحيح أي أن $z \epsilon \partial f(x)$ ويوجد دالة $\varphi \in \Gamma(E)$ تحقق أن: $\varphi(0) = 0$ و $\partial\varphi$ هي النهاية وفق تقارب كوراتوسكي القوي لمتتالية المجموعات :

$$\partial\varphi_{t_n} = (\Delta_{t_n}\partial f)_{x,z}$$

وذلك من أجل كل $(0 < t_n \to 0)$, عندئذ بما أن $z \epsilon \partial f(x)$ فإنه بحسب العلاقة (4.3) فإن:

$$O \in \partial\varphi_{t_n}(0)$$

من جهة أخرى فإن تقارب كوراتوسكي القوي لمتتالية المجموعات $\partial\varphi_{t_n} = (\Delta_{t_n}\partial f)_{x,z}$ سوف يقتضي أن

$$O \in \partial\varphi(0)$$

الآن بمراعاة أن $\varphi_{t_n}(0) = 0$ وبأخذ:

$$(\eta_n) = O, (\xi_n) = (0) \;\; ; \forall n \in \mathbb{N}, \forall t_n \to 0$$

نجد أنه يوجد $(0, O) \in \partial\varphi$, $(0, O) \in \partial\varphi_{t_n}$ بحيث يكون :

$$(0, \varphi(0), O) = \lim_{n\to\infty}(\xi_n, \varphi_{t_n}(\xi_n), \eta_n)$$

وبالتالي فإن $(ii), (i)$ من مبرهنة (أتوش بير) الواردة في بداية البرهان صحيحة وبالتالي فإن

$\varphi = \tau_s - \lim_n \varphi_{t_n}$ وذلك $\forall t_n \to 0$ الأمر الذي يعني أن f قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق سلايس في x بالنسبة إلى z . ■

3- العلاقة بين مشتق فريشيه وبين بروتو – مشتق .

<u>مبرهنة 4.7</u>: [7]

لنفترض أن: $\gamma: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ذو قيمة وحيدة ,عندئذ فإن γ قابل للاشتقاق وفق فريشيه في نقطة x إذا وفقط إذا كان γمستمراً في x , وفي نفس الوقت بروتو قابل للاشتقاق في x بالنسبة إلى $z = \gamma(x)$ مع كون $\gamma'_{x,z}$ خطي , وسيكون: $\gamma'_{x,z} = D\gamma(x)$.

<u>ملاحظة:</u>

حتى لو كان γ ذا قيمة وحيدة ومستمراً في نقطة x , وفي نفس الوقت بروتو قابل للاشتقاق في x بالنسبة إلى $z = \gamma(x)$, عندئذ فإن $\gamma'_{x,z}$ يمكن أن يكون ذا قيمة غير وحيدة في x كما سنرى في المثال التالي:

ليكن : $\gamma(x) = \sqrt{|x|} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,عندئذ فإنه من الواضح أن γ ذو قيمة وحيدة , ومستمر في النقطة $x = 0$ مع $\gamma(0) = 0$ و :

$$(\Delta_t \gamma)_{0,0}(\xi) = \frac{\gamma(t\xi)}{t} = \frac{\sqrt{|t\xi|}}{t} = \sqrt{\frac{|\xi|}{t}}$$

وسيكون γ بروتو قابل للاشتقاق في النقطة $x = 0$ بالنسبة إلى $\gamma(0) = 0$ مع:

$$\gamma'_{0,0}(\xi) = \begin{cases} [0,\infty) : \xi = 0 \\ \emptyset \quad\quad : \xi \neq 0 \end{cases}$$

<u>الحل:</u>

مهما تكن $\eta \in [0,\infty)$; $(0,\eta) \in gph(\gamma'_{0,0})$ ومهما تكن $t_n \to 0$:

$$\exists \xi_n = \eta^2 t_n : (\Delta_{t_n}\gamma)_{0,0}(\xi_n) = \eta$$

من جهة أخرى فإنه من أجل أي $\xi \neq 0$ فإنه مهما يكن $\xi_n \to \xi$ فإن:

$$(\Delta_{t_n}\gamma)_{0,0}(\xi_n) \to +\infty$$

<u>مبرهنة 4.8</u>: [7]

لنفترض أن:$\gamma: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ذو قيمة وحيدة ومستمر في نقطة x , وفي نفس الوقت بروتو قابل للاشتقاق في x بالنسبة إلى $z = \gamma(x)$ ولنفترض أن $\gamma'_{x,z}$ ذو قيمة وحيدة ومستمر على $\mathbb{R}^n$ عندئذ فإن:

$$\gamma'_{x,z}(\xi) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\gamma(x+t\xi)-\gamma(x)}{t}$$

مبرهنة 4.9:

لنفترض أن:$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دالة محدبة , عندئذ فإن f قابلة للاشتقاق وفق فريشيه من المرتبة الثانية في نقطة x إذا وفقط إذا كانت f قابلةً للاشتقاق وفق فريشيه من المرتبة الأولى في x وقابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الثانية في x بالنسبة إلى $\nabla f(x)$ مع :

$$f''_{x,\nabla f(x)}(\xi) = \frac{1}{2}\langle \nabla^2 f(x)\xi, \xi\rangle$$

إثبات :

بحسب المبرهنة 3.7 فإنه إذا كانت f قابلة للاشتقاق وفق فريشيه من المرتبة الثانية في نقطة x فإن f قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الثانية في x مع : $f''_{x,\nabla f(x)}(\xi) = \frac{1}{2}\langle \nabla^2 f(x)\xi, \xi\rangle$

بالطبع f قابلة للاشتقاق وفق فريشيه من المرتبة الأولى في x لأنها قابلة للاشتقاق وفق فريشيه من المرتبة الثانية في x .

الآن لنفترض أن f قابلة للاشتقاق وفق فريشيه من المرتبة الأولى في x وقابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الثانية في x مع :$f''_{x,\nabla f(x)}(\xi) = \frac{1}{2}\langle \nabla^2 f(x)\xi, \xi\rangle$ عندئذ فإنه بحسب المبرهنة 1.22 فإن $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$, (f قابلة للاشتقاق وفق فريشيه من المرتبة الأولى في النقطة x وبالتالي فإن f مستمر ة في x وذلك حسب المبرهنة 1.18 كما أن f محدبة فرضاً) من جهة أخرى فإنه بحسب النظرية 4.6 فإن (∇f) بروتو− قابل للاشتقاق في x بالنسبة إلى $\nabla f(x)$ مع:

$$\nabla\left(f''_{x,\nabla f(x)}\right) = (\nabla f)'_{x,\nabla f(x)}$$

وبحسب العلاقة السابقة فإن $(\nabla f)'_{x,\nabla f(x)}$ خطي لأن $\nabla\left(f''_{x,\nabla f(x)}\right)$ كذلك, كما أن ∇f مستمر في x

(بحسب تعريف مشتق فريشيه) ,عندئذ فإنه بحسب المبرهنة 4.7 فإن ∇f قابل للاشتقاق وفق فريشيه وبالتالي فإن f قابلة للاشتقاق وفق فريشيه من المرتبة الثانية في x . ■

الفصل الخامس

بعض التطبيقات على الأبحاث السابقة

1− مشتق مجموع دالتين إحداهما قابلة للاشتقاق وفق سلايس والأخرى وفق فريشيه

مبرهنة 5.1:

ليكن E فضاءً خطياً منظماً ما ولتكن $f:E \to \mathbb{R}$, $g:E \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ دالتين تنتميان إلى $\Gamma(E)$ ولتكن x إحدى نقاط E ولنفترض أن f قابلة للاشتقاق وفق فريشيه في x وأن g قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الأولى في x وليكن $h=f+g$, عندئذ فإن:

1) h دالة قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الأولى في x مع :

$$h'_x(\xi)=\langle Df(x),\xi\rangle+g'_x(\xi)\ ,\forall\xi\in E$$

2) $$z=Df(x)+y\in\partial h(x)\Leftrightarrow y\in\partial g(x)$$

إثبات :

1) بدايةً لكون $h-f+g$ فإنه من الواضح أن:

$$(\Delta_t h)_x(\xi)=(\Delta_t f)_x(\xi)+(\Delta_t g)_x(\xi)$$

ولنبرهن الآن أن: $(\Delta_t h)_x$ تتقارب وفق سلايس من $\langle Df(x),\xi\rangle+g'_x(\xi)$

لنضع :

$$\varphi(\xi)-\langle Df(x),\xi\rangle+g'_x(\xi)\ ,\forall\xi\in E$$

ولتكن $(y,\eta)\epsilon epi(\varphi^*)$ مع $\varphi^*(y)<\eta$ (وبالتالي $\langle y,\xi\rangle-\eta<\varphi(\xi)$ وذلك من أجل كل $\xi\in E$) ولتكن (ξ_n) متتالية محدودة كيفية من نقاط E عندئذ بحسب المبرهنتين 2.11, 2.2 سنجد أن:

$$\varphi(\xi_n)=\langle Df(x),\xi_n\rangle+g'_x(\xi_n)\le(\Delta_{t_n}f)_x(\xi_n)\ +(\Delta_{t_n}g)_x(\xi_n),\forall n\in\mathbb{N}$$

الأمر الذي يعني أن :

$$(\Lambda_{t_n}h)_x(\xi_n)=(\Lambda_{t_n}f)_x(\xi_n)+(\Lambda_{t_n}g)_x(\xi_n)>\langle y,\xi_n\rangle-\eta,\forall t_n\to 0.$$

وبالتالي فإن الشرط الأول من تقارب سلايس محقق .

الآن وبحسب صيغة تايلور من المرتبة الأولى فإننا نستطيع أن نكتب:

$$(\Delta_{t_n}f)_x(\xi_n)=\langle Df(x),\xi_n\rangle+\ \frac{o(t_n\|\xi_n\|)}{t_n}$$

وبالتالي فإن :

$$\lim_{n\to\infty}(\Delta_{t_n}f)_x(\xi_n) = \lim_{n\to\infty}\langle Df(x),\xi_n\rangle + \lim_{n\to\infty}\frac{o(t_n\|\xi_n\|)}{t_n} = \langle Df(x),\xi\rangle$$

وذلك من أجل كل متتالية (ξ_n) متقاربة من ξ .

من جهة أخرى ونتيجة لكون g قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الأولى فإنه توجد متتالية (ξ_n) متقاربة من ξ بحيث أن :

$$g'_x(\xi) = \lim_{n\to\infty}(\Delta_{t_n}g)_x(\xi_n)$$

وبالتالي من أجل هذه المتتالية (ξ_n) فإن:

$$\lim_{n\to\infty}(\Delta_{t_n}h)_x(\xi_n) = \lim_{n\to\infty}(\Delta_{t_n}f)_x(\xi_n) + \lim_{n\to\infty}(\Delta_{t_n}g)_x(\xi_n) = \varphi(\xi)$$

الأمر الذي يعني أن الدوال $(\Delta_t h)_x$ متقاربة وفق سلايس من φ وبذلك يتم برهان (1) .

2) لنفترض أولاً أن $y \in \partial g(x)$ عندئذ فإن:

$$\forall\xi \in E : g(\xi) \geq g(x) + \langle y, \xi - x\rangle$$

وبحسب المبرهنة 1.18 فإن:

$$\forall\xi \in E : f(\xi) \geq f(x) + \langle Df(x), \xi - x\rangle$$

وبجمع العلاقتين للسابقتين نجد مباشرةً مع مراعاةكون $h = f + g$ أن:

$$\forall\xi \in E : h(\xi) \geq h(x) + \langle Df(x) + y, \xi - x\rangle$$

الأمر الذي يعني أن :

$$.z = Df(x) + y \in \partial h(x)$$

ومن أجل العكس لنفترض أن $z = Df(x) + y \in \partial h(x)$ عندئذ وبحسب المبرهنة2.8 (a) فإن:

$$\langle Df(x) + y, \xi\rangle \leq h'_x(\xi) = \langle Df(x), \xi\rangle + g'_x(\xi) : \forall\xi \in E$$

وبالتالي فإن:

$$\langle y, \xi\rangle \leq g'_x(\xi), \forall\xi \in E$$

وبالتالي وبحسب المبرهنة 2.8 , (b) فإن: $y \in \partial g(x)$ وهو المطلوب . ■

<u>مبرهنة 5.2:</u>

ليكن E فضاءً خطياً منظماً ما ولتكن $f: E \to \mathbb{R}$, $g: E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ دالتين تنتميان إلى $\Gamma(E)$ ولتكن x إحدى نقاط E ولنفترض أن f قابلة للاشتقاق وفق فريشيه من المرتبة الثانية في x وأن g قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبتين الأولى والثانية (من المرتبة الثانية بالنسبة إلى $y \in E^*$) وليكن $h = f + g$ عندئذ فإن:

h دالة قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الثانية في x بالنسبة إلى $z = Df(x) + y$ مع:

$$h''_{x,z}(\xi) = \frac{1}{2}\langle D^2 f(x)\xi, \xi\rangle + g''_{x,y}(\xi), \forall\xi \in E$$

إثبات :

يتم بشكل مشابه للمبرهنة 5.1 وذلك مع مراعاة المبرهنة 3.7 . ■

2– دالة موريو يوشيدا وخواصها

من الدوال ذات الأهمية الخاصة في نظرية الأمثليات هي دالة موريو يوشيدا , وفي بحثنا سنقوم بعرض أهم النظريات التي ستخدمنا (وهي واردة في كتاب أتوش [1]) ,ثم تطبيق هذه المبرهنات إضافةً إلى مبرهناتنا السابقة في إيجاد المشتق من المرتبة الثانية لدالة موريو يوسيدا وفق سلايس وتقديم نتائج أخر في ما يتعلق بنظرية الأمثليات.

تعريف 5.3:

ليكن E فضاءً خطياً منظماً ما , ولتكن $f: E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ دالة تنتمي إلى $\Gamma(E)$ نعرف دالة موريو يوشيدا ونرمز لها بالرمز (f^{λ}) بأنها الدالة المعرفة على E بالشكل:

$$f^{\lambda}(x) = \inf_{u \in E}\left\{f(u) + \frac{1}{2\lambda}\|u - x\|^2\right\}, (x \epsilon E), \forall \lambda > 0$$

من الواضح أن f^{λ} لا تأخذ $+\infty$ في أية نقطة .

مبرهنة 5.4 , ($[1], P(226)$):

وفق معطيات التعريف السابق فإن الدالة (f^{λ}) محدبة ومستمرة, والعائلة $(f^{\lambda})_{\lambda > 0}$ تتقارب بتزايد نحو f (عندما تتناقص λ إلى الصفر), وأكثر من ذلك فإن:

$$(f^{\lambda})^*(z) = f^*(z) + \frac{\lambda}{2}\|z\|_{E^*}^2$$

تعريف 5.5 :الفضاء التام التحدب:

نقول عن فضاء منظم $(E, \|.\|)$ أنه تام التحدب إذا كان نظيمه تام التحدب أي إذا حقق العلاقة:

$$\|tx + (1-t)\xi\| < t\|x\| + (1-t)\|\xi\| \; ; \forall x, \xi \in E \; ; \; \xi \neq cx \; ; c > 0$$

$$\xi \neq 0, x \neq 0, 0 < t < 1$$

بالطبع فإن أي نظيم هو تابع محدب لكن ليس بالضرورة أن يكون تام التحدب.

نتيجة 5.6:

إن أي فضاء لهلبرت تام التحدب وذلك بحسب التمهيدية(1–2–3) الصفحة (177) من المرجع [16] ($\|x + \xi\| \leq \|x\| + \|\xi\|$) (متراجحة المثلث) ,علماً أن الشرط اللازم والكافي لتحقق المساواة هو أن يكون: ($\xi = cx \; ; c \geq 0$ أو $\xi = 0$) .

تعريف 5.7:

ليكن E فضاء باناخ , سنرمز تحت التفاضل للتابع المحدب تماماً والمستمر $x \mapsto \frac{1}{2}\|x\|^2$ في نقطة x بالرمز $U(x)$. إن $U(x)$ غير خال وهو يساوي بحسب (المبرهنة 2.26 لفيليب [10]):

$$U(x) = \{g \in H^*: \langle g, x\rangle = \|x\|^2, \|g\| = \|x\|\}$$

نتيجة 5.8:

ليكن H فضاءً لهلبرت عندئذ بحسب تمثيل ريس فإنه من أجل أي دالة خطية ومستمرة g معرفة على H, يوجد عنصر z من H بحيث أن: $\langle g,x\rangle = \langle z,x\rangle$, $\|g\| = \|z\|$ و z هذه معينة بشكل وحيد بدلالة g , و بالمقارنة مع التعريف 5.7 سنجد أن:

$$U(x) = \{z \in H: \langle z,x\rangle = \langle x,x\rangle, \|z\| = \|x\|\}$$

ولأن z معينة بشكل وحيد فإن : $U(x) = \{\langle x, .\rangle\}$.

مبرهنة 5.9:

ليكن H فضاءً لهلبرت, ولتكن $f: H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ دالة تنتمي إلى $\Gamma(H)$,عندئذ فإنه من أجل كل $\lambda > 0$ ومن أجل كل x من H فإن:

$$f^{\lambda}(x) = \min_{u \in H}\left\{f(u) + \frac{1}{2\lambda}\|u - x\|^2\right\} = f\left(j_{\lambda}^{f}(x)\right) + \frac{1}{2\lambda}\left\|j_{\lambda}^{f}(x) - x\right\|^2$$

حيث أن $j_{\lambda}^{f}(x)$ ترمز للنقطة التي تبلغ فيها $f^{\lambda}(x)$ حدها الأدنى, وعندئذ سنجد أن:

$$j_{\lambda}^{f}(x) - u \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}U\left(x - j_{\lambda}^{f}(x)\right) \in \partial f\left(j_{\lambda}^{f}(x)\right)$$

أيضاً فإن f^{λ} قابلة للاشتقاق وفق فريشيه من المرتبة الأولى في كل نقطة x مع :

$$Df^{\lambda}(x) = \frac{1}{\lambda}U\left(x - j_{\lambda}^{f}(x)\right) = \frac{1}{\lambda}\langle x - j_{\lambda}^{f}(x), .\rangle$$

والمؤثر : $x \mapsto j_{\lambda}^{f}(x)$ مؤثر مستمر.

إثبات :

هذه المبرهنة هي حالة خاصة من (أتوش [1] , النظرية(*3.24*) , الصفحة(301))وذلك مع مراعاة النتيجة 5.6 , النتيجة 5.8,و أنه في فضاء هلبرت تصح القاعدة التالية:

((التقارب الضعيف وتقارب النظائم يقتضي التقارب القوي))

وذلك لأنه :

إذا كانت $x_n \xrightarrow{\omega} x$ عندئذ فإن $\langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle$ و إذا كانت $\|x_n\| \to \|x\|$ عندئذ فإن:

$$\|x_n - x\|^2 = \langle x_n - x, x_n - x\rangle = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x_n, x\rangle$$

وعندما $n \to \infty$ فإن

$$\|x_n - x\|^2 \rightarrow 2\|x\|^2 - 2\|x\|^2 = 0$$

وبالتالي فإن x_n تتقارب بقوة من x , وهذا هو المطلوب . ■

مبرهنة 5.10:

ليكن H فضاءً لهلبرت, ولتكن $f: H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ دالة تنتمي إلى $\Gamma(H)$, ولنفترض أن f قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الثانية في $u - j_\lambda^f(x)$ بالنسبة إلى $z = Df^\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}\langle x - u, .\rangle$

عندئذ فإن f^λ قابلة للاشتقاق وفق سلايس في x بالنسبة إلى z مع :

$$(f^\lambda)''_{x,z} = (f''_{u,z})^\lambda$$

إثبات :

بحسب المبرهنة 5.4 سيكون لدينا:

$$(f^\lambda)^*(z) = f^*(z) + \frac{\lambda}{2}\|z\|^2_{E^*}$$

وبما أن f قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق سلايس في u بالنسبة إلى z فإن f^* قابلة للاشتقاق وفق سلايس في z بالنسبة إلى u مع :

$(f''_{u,z})^* = (f^*)''_{z,u}$ ....(نظرية المرافق)

كما أن مشتق فريشيه للدالة $\frac{\lambda}{2}\|.\|^2_{E^*}$ في النقطة z هو $\lambda\langle z, .\rangle$ و مشتق فريشيه من المرتبة الثانية للدالة $\frac{\lambda}{2}\|.\|^2_{E^*}$ هو $\frac{\lambda}{2}\|.\|^2_{E^*}$.

الآن ولكون f^* قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الثانية في z بالنسبة إلى u فإن $u \in \partial f^*(z)$

وبالتالي فإن $f(u) + f^*(z) = \langle u, z\rangle$

عندئذ فإن:

$$\begin{aligned}(f^\lambda)^*(z) + f^\lambda(x) &= f^*(z) + \frac{\lambda}{2}\|z\|^2_{E^*} + f(u) + \frac{1}{2\lambda}\|u - x\|^2 \\ &= \langle u, z\rangle + \frac{1}{2\lambda}\langle x - u, x - u\rangle + \frac{1}{2\lambda}\langle x - u, x - u\rangle \\ &= \langle u, z\rangle + \frac{1}{\lambda}\langle x - u, x - u\rangle = \langle u, z\rangle + \langle z, x - u\rangle = \langle z, x\rangle\end{aligned}$$

الأمر الذي يعني أن: $x \in \partial(f^\lambda)^*(z)$

وبالتالي وبحسب المبرهنة 5.2 فإن $(f^\lambda)^*$ قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الثانية في z بالنسبة إلى x (وبالتالي f^λ قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الثانية في x بالنسبة إلى z) مع:

$$[(f^\lambda)^*]''_{z,x} = (f^*)''_{z,u} + \frac{\lambda}{2}\|.\|^2_{E^*} = (f''_{u,z})^* + \frac{\lambda}{2}\|.\|^2_{E^*} = ((f''_{u,z})^\lambda)^*$$

مرةً أخرى وباستخدام نظرية المرافق نجد أن:

$$[(f^{\lambda})''_{x,z}]^* = ((f''_{u,z})^{\lambda})^*$$

وبالتالي فإن: $$(f^{\lambda})''_{x,z} = (f''_{u,z})^{\lambda} \quad \blacksquare$$

<u>مبرهنة 5.11:</u>

لتكن $f: H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ دالة تنتمي إلى $\Gamma(H)$ ، ولنفترض أن f قابلة للاشتقاق وفق سلايس من المرتبة الثانية في $u = j_{\lambda}^{f}(x)$ بالنسبة إلى $z = Df^{\lambda}(x) = \frac{1}{\lambda}\langle x-u,.\rangle$ عندئذ :

1) المؤثر j_{λ}^{f} بروتو– قابل للاشتقاق في x بالنسبة إلى u مع :

$$\left(j_{\lambda}^{f}\right)'_{x,u}(\xi) = arg\ \min_{\eta\in H}\{ f''_{u,z}(\eta) + \frac{1}{2\lambda}\|\xi-\eta\|^2 \}$$

أي هي النقطة التي تبلغ فيها الدالة $(f''_{u,z})^{\lambda}$ حدها الأدنى .

2) $\left(j_{\lambda}^{f}\right)'_{x,u}$ مؤثر مستمر و متجانس إيجابياً من المرتبة الثانية .

<u>إثبات :</u>

إذا كانت $w = j_{\lambda}^{f}(\xi)$ فإن $Df^{\lambda}(\xi) = \langle\frac{1}{\lambda}(\xi-w),.\rangle = \langle v,.\rangle$

لنأخذ الآن المؤثر الخطي المستمر:

$$A: H\times H^* \mapsto H\times H$$

المعرف بالشكل:

$$A(\xi,\langle\eta,.\rangle) = (\xi,\xi-\lambda\eta)\ ;\eta\in H$$

وبالتالي فإن :

$$A(\xi,\langle v,.\rangle) = (\xi,\xi-\lambda v) = (\xi,w)$$

عندئذ نلاحظ أن:

$$gph\left(j_{\lambda}^{f}\right) = A\left[gph\left(Df^{\lambda}\right)\right]$$

وبالتالي فإنه بحسب المبرهنة 4.4 (وهنا $\gamma = Df^{\lambda}: H\mapsto H^*$, $A\gamma = j_{\lambda}^{f}: H\mapsto H$) فإن:

المؤثر j_{λ}^{f} بروتو– قابل للاشتقاق في x بالنسبة إلى u إذا وفقط إذا كان Df^{λ} قابلاً للاشتقاق في x بالنسبة إلى z مع

$$\left(j_{\lambda}^{f}\right)'_{x,u} = A\left(Df^{\lambda}\right)'_{x,z}$$

وبالتالي

$$gph\left(j_{\lambda}^{f}\right)'_{x,u} = gph\left[A\left(Df^{\lambda}\right)'_{x,z}\right] = A\left[gph\left(Df^{\lambda}\right)'_{x,z}\right] = A\left[gph\left(D\ (f^{\lambda})''_{x,z}\right)\right]$$

$$= \Lambda\left[gph\left(D(f''_{u,z})^{\lambda}\right)\right]$$

لذلك فإنه من أجل أي $\xi \in H$ فإن:

$$\left(j_\lambda^f\right)'_{x,u}(\xi) = \xi - \lambda\left(\frac{1}{\lambda}(\xi - w'')\right) = w''$$

حيث أن:

$$D(f''_{u,z})^{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\langle \xi - w'', . \rangle \ , w'' - j_\lambda^{f''_{u,z}}(\xi)$$

الأمر الذي يعني أن:

$$\left(j_\lambda^f\right)'_{x,u}(\xi) = w'' = j_\lambda^{f''_{u,z}}(\xi) = arg\min_{\eta\in H}\{ f''_{u,z}(\eta) + \frac{1}{2\lambda}\|\xi - \eta\|^2 \}$$

2) بما أن $f''_{u,z} \in \Gamma(H)$ وبما أن $\left(j_\lambda^f\right)'_{x,u} = j_\lambda^{f''_{u,z}}$ عندئذ فإن $\left(j_\lambda^f\right)'_{x,u}$ مؤثر مستمر.

ولنبرهن الآن أن $\left(j_\lambda^f\right)'_{x,u}$ متجانس إيجابياً من المرتبة الثانية , ومن أجل ذلك لنأخذ $t > 0$ عندئذ سنجد أن:

$$\left(j_\lambda^f\right)'_{x,u}(t\xi) = arg\min_{\eta\in H}\{ f''_{u,z}(\eta) + \frac{1}{2\lambda}\|t\xi - \eta\|^2 \}$$

وبفرض أن $\eta = tl$ ومراعاة أن $f''_{u,z}(tl) = t^2 f''_{u,z}(l)$ (المبرهنة 3.2−(1))نجد مباشرةً أن :

$$\left(j_\lambda^f\right)'_{x,u}(t\xi) = arg\min_{l\in H}\{t^2 f''_{u,z}(\eta) + \frac{1}{2\lambda}t^2\|\xi - l\|^2 \}$$

$$\left(j_\lambda^f\right)'_{x,u}(t\xi) = t^2 arg\min_{l\in H}\{ f''_{u,z}(\eta) + \frac{1}{2\lambda}\|\xi - l\|^2 \} = t^2\left(j_\lambda^f\right)'_{x,u}(\xi)$$

و هو المطلوب . ■

3- بروتو مشتق لمؤثر الإسقاط .

<u>مبرهنة 5.12</u> [17]:

لتكن C فضاءً جزئياً مغلقاً وغير خال في فضاء هلبرت H عندئذ فإن: $H = C \oplus N_C$ حيث أن N_C هي المتمم المعامد للفضاء الجزئي C في H أي أنه من أجل كل x من H يوجد $u \in C, v \in N_C$ بحيث أن x يكتب بشكل وحيد : $x = u + v$, $\langle u, v\rangle = 0$.

<u>تعريف 5.13:</u>

نسمي المؤثر $P: H \to C$ المعرف بالشكل: $P(x) = u$ حيث أن $x = u + v$ كما في السابق بمؤثر الإسقاط للفضاء H على C . ومن المعروف أن P خطي ومستمر .

تعريف 5.14: الدالة دلتا

لتكن C مجموعة ما في فضاء منظم E , نعرف الدالة دلتا للمجموعة C ونرمز لها بالرمز δ_C بالشكل:

$$\delta_C(x) = \begin{cases} 0 & : x \in C \\ +\infty & : x \notin C \end{cases}$$

مبرهنة 5.15: [15]

لتكن C مجموعة ما في فضاء منظم E , عندئذ فإن ما يلي صحيح:

1. C محدبة إذا وفقط إذا كانت δ_C دالة محدبة.
2. C غير خالية إذا وفقط إذا كانت δ_C فعلية .
3. C مغلقة إذا وفقط إذا كانت δ_C نصف مستمرة من الأدنى .

مبرهنة 5.16:

لتكن C فضاءً جزئياً مغلقاً وغير خال في فضاء هلبرت H , وليكن P مؤثر إسقاط للفضاء H على C, ولنفترض أن δ_C دالة قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق سلايس في $P(x) = u$ (حيث أن $x \in H, u \in C$) بالنسبة إلى $z = \langle x - u, . \rangle$ عندئذ فإن P بروتو- قابل للاشتقاق في x بالنسبة للنقطة u و $p'_{x,u}$ متجانس إيجابياً من المرتبة الثانية مع :

$$p'_{x,u}(\xi) = arg\min_{\eta \in H}\{(\delta_C)''_{u,z}(\eta) + \frac{1}{2}\|\xi - \eta\|^2\}$$

إثبات :

بأخذ $f = \delta_C$ و $\lambda = 1$ عندئذ وبمراعاة تعريف مؤثر الإسقاط والدالة دلتا فإن :

$$(\delta_C)^{\lambda}(x) = \min_{u \in H}\left\{\delta_C(u) + \frac{1}{2\lambda}\|u - x\|^2\right\} = P(x) = u$$

وبالتالي فإن $P(x) = u = j_{\lambda}^{f}(x)$ وبالتالي و بتطبيق المبرهنة 5.11 نجد المطلوب . ■

مبرهنة 5.17: ([10], 3.23)

ليكن Eفضاءً لباناخ , وليكن f,g دالتين من $\Gamma(H)$, ولنفترض أن f مستمرة في نقطة x من $dom\,(f)\cap dom(g)$ عندئذٍ فإن :

$$\partial(f+g)(x)=\partial(f)(x)+\partial(g)(x) \quad ; x\in dom\,(f+g)$$

مبرهنة 5.18:

لتكن Cمجموعة محدبة و مغلقة وغير خالية في فضاء هلبرت H , ولتكن φ دالة تنتمي إلى $\Gamma(H)$ ولنفترض أن $\partial\varphi(\eta)\neq\emptyset$ وذلك من أجل كل η من C وأن φ مستمر على C وليكن:

$$P(\xi)=arg\min_{\eta\in C}\{\varphi(\eta)+\frac{1}{2}\|\xi-\eta\|^2\};\forall\xi\in H.$$

عندئذ فإن P ذو قيمة وحيدة $\forall\xi\in H$, كما أن P مستمر ومداه هو C ذاتها (ولذلك إذا كان P خطي فإن C فضاء جزئي خطي من H) .

إثبات :

بأخذ $f=\varphi+\delta_C$ و $\lambda=1$ ومن ثم تطبيق المبرهنة 5.9 نجد أن :

$$\eta=j_\lambda^f(\xi)= arg\min_{\eta\in H}\{\varphi(\eta)+\delta_C(\eta)+\frac{1}{2}\|\xi-\eta\|^2\};\forall\xi\in H$$

$$=arg\min_{\eta\in C}\{\varphi(\eta)+\frac{1}{2}\|\xi-\eta\|^2\}=P(\xi)$$

ولكون j_λ^f وحيد القيمة ومستمر فإن $P(\xi)$ كذلك .

الآن و لكون $\partial\varphi(\eta)\neq\emptyset$ فإنه ومع مراعاة تعريف δ_C فإن $\eta\in dom\,(\varphi+\delta_C)$ وذلك مهما يكن η من C . ولدينا بالفرض أن φ مستمر على C إذاً وبحسب المبرهنة 5.17 فإن

$$\partial f(\eta)=\partial\varphi(\eta)+\partial\delta_C(\eta)$$

مرةً أخرى وباستخدام المبرهنة 5.9 نجد أن:

$$\eta=P(\xi)\Leftrightarrow\eta\in C,\langle\xi-\eta,.\rangle\in\partial f(\eta)=\partial\varphi(\eta)+\partial\delta_C(\eta)$$

$$\Leftrightarrow\eta\in C,\langle\xi,.\rangle\in\langle\eta,.\rangle+\partial\varphi(\eta)+\partial\delta_C(\eta)$$

ولكون $\partial\varphi(\eta)\neq\emptyset$ وذلك من أجل كل η من C فإن المجموعة $\langle\eta,.\rangle+\partial\varphi(\eta)+\partial\delta_C(\eta)$

غير خالية على الدوام وبالتالي مدى P هو C . ■

الاستنتاجات والتوصيات

نوصي في نهاية هذا البحث أن تتم دراسة المشتقات وفق سلايس لمراتب عليا وبيان علاقتها مع مشتقات فريشيه من مراتب عليا وما إذا كان يمكن تطبيق النتائج التي سيتم الحصول عليها في الحصول على القيم الدنيا وما إذا كان يمكن دراسة هذه المشتقات على مجموعات ذات خاصية مفيدة في تعيين القيم الدنيا مثل: المجموعة المخروطية ($Cone\ \ set$) والمجموعة ($Tangent\ Cone$).

كما نوصي بتقديم دراسة جديدة تتعلق باشتقاق المؤثرات المتعددة القيم وذلك باستبدال تقارب كوراتوسكي بتقارب سلايس للمجموعات وبيان إن كان هنالك ثمة علاقة بين المشتق من المرتبة الثانية لدالة محدبة وفق سلايس وبين مشتق تحت تفاضلها (والذي يمكن تسميته بمشتق بروتو – سلايس) .

كما نوصي بدراسة الخواص التفاضلية وفق مفهوم سلايس لدوال من النوع $f = g \circ F$ حيث $g \in \Gamma(E)$ و F تطبيقاً من الصف C^2 , حيث يمكن أن تساهم الدراسة السابقة في حل مسائل يمكن أن تأخذ الشكل

$$\min \{(g \circ F)(x)\,;\, x \in X\}$$

و للمسألة السابقة دور كبير في حل الكثير من مسائل الأمثليات والخوارزميات العددية .

المصطلحات العلمية

المصطلح باللغة الإنكليزية	المصطلح باللغة العربية
Maximal	أعظمي
Epi graphical convergence	التقارب فوق البيان
The first order slice derivative	المشتق من المرتبة الأولى وفق سلايس
The second order slice derivative	المشتق من المرتبة الثانية وفق سلايس
proto derivative	بروتو مشتق
Subdifferential	تحت التفاضل لدالة
slice convergence	تقارب سلايس
Set convergense in Kuratowski sense	تقارب كوراتوسكي للمجموعات
Mosco –convergence	تقارب موسكو
bilinear	ثنائي الخطية
proper function	دالة فعلية
Convex Function	دالة محدبة
The conjugate function	دالة مرافقة
affine function	دالة ملساء
Moreau-Yosida function	دالة موريو يوشيدا
Lower semi continuous function	دالة نصف المستمرة من الأدنى
Lower semi continuous function weakly	دالة نصف المستمرة من الأدنى بضعف
upper semi continuous function	دالة نصف المستمرة من الأعلى
Banach space	فضاء باناخ

reflexive Banach space	فضاء باناخ انعكاسي
First countable topological space	فضاء تبولوجي يتمتع بقابلية العد من النوع الأولى
normed space	فضاء منظم
epi graph	فوق البيان
positively homogeneous	متجانس إيجابياً
compact	متراص
weak compact	متراص بضعف
Frechet derivatives	مشتق فريشيه
Gateaux derivatives	مشتق كاتو
projection map	مؤثر إسقاط
Multifunction	مؤثر متعدد القيم
Monotone operator	مؤثر مطرد
Strictly convex	محدب تماماً
Convex Set	مجموعة محدبة

Introduction

In [11] Rockafeller introduced the epi- derivatives in terms of epi-convergence in finit dimensional space for extended real valued functions , and In [7] , [6] Chi Ngoc Do and Cominetti studied these results in terms of Mosco- convergence in reflexive Banach space .also some of these results introduced by Soueycatt in terms of ρ −Hausdorff distance [16] . The aim of this paper is to extend these

setting to general normal spaces, using a stronger convergence notion is called Epigraphical Slice Convergence introduced by Beer[4]. It is coincides with the epi- convergence in finit dimensional space and coincides with Mosco-convergence in reflexive Banach space.
We obtain the new results for the first and second- order epi-derivative of convex function and we give some optimal conditions .

This paper is organized as follows . In chapter 1 , we fix the notations and recall Some definitions and some known results .

In chapter 2 , we consider the definition and the properties of the first –order slice derivatives on a normal space . We also shows the connection between the first -order slice -derivative of convex function f and the Subdifferential mapp ∂f .

We also shows that the class of the first –order slice differentiable of convex functions is much richer than the class of the first –order Frechet differentiable .

In chapter 3 , we consider the definition and the properties of the second –order slice derivatives . one also proves that the conjugate of second- order epi-derivative of convex function equals the second- order epi-derivative of conjugate this function in terms of slice topology . We also shows that the class of the second –order slice differentiable of convex functions is much richer than the class of the second –order Frechet differentiable . We also shows the connection between the second- order slice -derivative of convex function f and the first –order slice

derivatives .

In chapter 4 , we consider the definition and the properties of Proto derivatives . We also shows the connection between the second- order slice -derivative of convex function f and the natural concept of Proto- derivative of the set-valued

mapping ∂f which can be written as :

$$\partial\left(f''_{x,z}\right) = (\partial f)'_{x,z}$$

In chapter 5 , we study the first and second order slice differentiability to sub of tow functions . We give some calculus to our study , we provide examples of twice slice- differentiable of Moreau-Yosida function and projection map in Hilbert space .

Chapter 1

Let us recall some definitions and notions, which are of common use in the context of convex analysis and optimization; for further information, we can refer to [6,9,11,5].let E be a normed linear space and E^* it is dual, the duality pairing between $z \in E^*$ and $x \in E$ is denoted by $\langle z, x\rangle$,and let $f: E \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ of the real valued extended function defined on E . For this function the set :

$$epi\, f = \{(x, \propto) \in E \times \mathbb{R}; f(x) \leq \propto\}$$

Is called the *epigraph* of f , and f is called *convex* function if :

$$\forall x, y \in E, \forall t \in [0,1] ; f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

and f is called *lower semi continues* function if :

$$\forall x \in E, \forall x_n \longrightarrow x ;\ f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$$

and f is called *proper* function if : $dom(f) = \{x \in E ; f(x) < +\infty\} \neq \emptyset$

Again, $\Gamma(E)$ will denote the proper , lower semi continues convex functions defined on E .

The *conjugate* of f :(f^*) is defined by the familiar formula :

$$\forall z \in E^*; f^*(z) = sup_{x\in E}\{\langle z, x\rangle - f(x)\}$$

The *Subdifferential* of f at x ,denoted by $\partial f(x)$, is defined by :

$$\partial f(x) = \{z \in E^* ; f(u) \geq f(x) + \langle z, u - x\rangle ; \forall u \in E\}$$

$$= \{z \in E^*; f(x) + f^*(z) = \langle z, x\rangle\}$$

<u>Frechet derivatives .[9]:</u>

Let F, E be normed spaces , let $f: E \to F$ be a given mapping , let $x \in E$,if there is a continuous linear mapping $Df(x): E \to F$ with the property :

$$\lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{\| f(x+\xi) - f(x) - Df(x)(\xi) \|}{\|\xi\|} = 0$$

Then $Df(x)$ is called the Frechet derivatives of f at x and f is called Frechet differentiable at x .

Set convergense in strong Kuratowski sense.[1] :

Let E be a normed space and $\{C_n, C, n \in \mathbb{N}\}$ be a sequence of subsets of E , we say that the sequence $\{C_n, n \in \mathbb{N}\}$ convergense in strong Kuratowski sense to C

and we write $C = \lim_n C_n$ if :

$$s - ls\, C_n \subset C \subset s - li\, C_n$$

where:

$$s - ls\, C_n = \{x \in E;\ \exists(n_k), \exists(x_k); \forall k \in \mathbb{N}: x_k \in C_{n_k}, x_k \overset{s}{\rightarrow} x\}$$

$$s - li\, C_n = \{x \in E;\ \exists(x_n); \forall n \in \mathbb{N}: x_n \in C_n, x_n \overset{s}{\rightarrow} x\}$$

Mosco –epigraphical convergence .[1] .

Let E be a reflexive Banach space and $\{f_n, f: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, n \in \mathbb{N}\}$ be a sequence of functions from $\Gamma(E)$. We say that the sequence $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ is Mosco –epigraphical convergence to f and we write f=M-lim f_n if the tow following statements hold:

$$(i) \quad \forall x \in E, \forall x_n \overset{\omega}{\rightarrow} x: f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f_n(x_n)$$

$$(ii) \quad \forall x \in E, \exists\, x_n \overset{s}{\rightarrow} x: f(x) \geq \limsup_{n\to\infty} f_n(x_n)$$

Slice convergence:

Let E be a normed space and $\{f_n, f: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, n \in \mathbb{N}\}$ be a sequence of functions from $\Gamma(E)$. We say that the sequence $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ is slice convergence to f and we write $f = \tau_s - \lim_n f_n$ if the tow following statements hold :

(i) for any $(y, \eta) \epsilon\, epi(f^*)$ with $f^*(y) < \eta$ and for each bounded sequence (ξ_n) , there exists $n_0 \epsilon \mathbb{N}$ such that for each $n > n_0$ we have :

$$f_n(\xi_n) > \langle y, \xi_n \rangle - \eta$$

(ii) for each $\xi \epsilon E$, there exists a sequence (ξ_n) convergence strongly to ξ for which:
$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f_n(\xi_n)$$

• what we will be dealing with is a family of function $(f_t)_{t>0}$ parameterized by $t > 0$. the slice convergence of f_t to f is defined in a natural way by saying

f_{t_n} slice convergence to f ,for every sequence $0 < t_n \to 0$.

Proposition: [4]

Let E be a normed space and $\{f_n, f;\ n \in \mathbb{N}\}$ be a sequence of functions from $\Gamma(E)$, then the tow following conditions are equivalent :

(i) $\quad f = \tau_s - \lim_n f_n$

(ii) $\quad f^* = \tau_s - \lim_n {f_n}^*$

Proposition: [3]

Let E be a Banach space and $\{f_n, f\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ be a sequence of functions from $\Gamma(E)$ .then $f = \tau_s - \lim_n f_n$ if and only if the following tow conditions are met :

(i) $\quad \partial f = \lim_n \ \partial(f_n)$

(ii) $\quad \exists(u,z) \in gph\,(\partial f), \exists(u_n, z_n) \in \partial(f_n): (u_n, z_n) \to (u,z), f_n(u_n) \to f(u)$

Proposition:

Let E be a normed space and $\{f_n, f;\ n \in \mathbb{N}\}$ be a sequence of functions from $\Gamma(E)$ such that $f = \tau_s - \lim_n f_n$ .then the following statements hold :

(i) $f(\xi) \le f_n(\xi)$ $\quad ,\forall n$ sufficiently large .

(ii) for each $\xi \in E$,and for each sequence (ξ_n) convergence strongly to ξ ,we have :

$$f(\xi) \le \lim_{n\to\infty} \inf f_n\,(\xi_n)$$

(iii) for each $\lambda > 0$, we have :

$$\lambda f - \tau_s - \lim_n \lambda f_n$$

Proposition:

Let E be a normed space and $\{f_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ be an increasing sequence of functions from $\Gamma(E)$, Let $f = \sup f_n$ be a proper function then :

$$f = \tau_s - \lim_n f_n$$

Chapter 2

The first order slice derivatives in normed space

Throughout this section , E is a normed space and $f \in \Gamma(E)$, $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. and let f be finit at $x \in E$.

Definition:

let us consider the first order difference quotient functions :

$$(\Delta_t f)_x(\xi) = \frac{1}{t}\{f(x + t\xi) - f(x)\}; \forall t > 0, \forall \xi \epsilon \mathrm{E}$$

If these function slice convergence (as ($t \to 0$) to some function $\varphi \in \Gamma(E)$ then we say that f is once slice- differentiable at x ,and φ is called the first order slice derivatives of f at x . we then write f_x' instead of φ .

Proposition:

let f be once slice- differentiable at x , then:

(i) f_x' is positively homogeneous of degree 1 .

(ii) $f_x'(0) = 0$.

Proposition:

Let f be once slice- differentiable at x , if x is a local minimal point of f on E then: $f_x'(\xi) \geq 0 \ , \forall \xi \in E$

Proposition:

Let f be once slice- differentiable at x , if $f_x'(\xi) > 0 \ , \forall \xi \in E$,then x is a local minimal point of f on E .

Proposition:

Let f be once slice- differentiable at x , then :

(i) if $z \epsilon \partial f(x)$ then $f_x'(\xi) \geq \langle z, \xi \rangle : \ \forall \xi \epsilon E$.

(ii) if $f_x'(\xi) \geq \langle z, \xi \rangle : \ \forall \xi \epsilon E$ then $z \epsilon \partial f(x)$.

Proposition:

Let $f : E \mapsto \mathbb{R}$ be once slice- differentiable at x , and let $int\ (epi\ f) \neq \emptyset$ then :

$$f_x'(\xi) = \max\{\langle z, \xi \rangle : \ \forall \xi \ \in E, \forall \ z \epsilon \partial f(x) \ \}$$

Proposition:

Let X, E be normed spaces , let $A: X \to E$ be a linear isomorphism mapping , and $f \in \Gamma(E)$, $f: E \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$,and let $x \in X$, if f is once slice-differentiable at $Ax \in E$, then foA is once slice- differentiable at x whith :

$$(f \circ A)'_x(\xi) = f'_{Ax}(A\xi) = (f'_{Ax} \circ A)(\xi)$$

Proposition:

Let $f: E \mapsto \mathbb{R}$ be once Frechet- differentiable at x , then f will be once slice-differentiable at x with :

$$f'_x(\xi) = \langle Df(x), \xi \rangle$$

Chapter 3

The second order slice derivatives in normed space

Throughout this section , E is a normed space and $f \subset \Gamma(E)$, $f: E \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. and let f be finit at $x \in E$ .and $z \in E^*$.

Definition:

let us consider the second order difference quotient function :

$$(\Delta_t^2 f)_{x.z}(\xi) = \frac{1}{t^2}\{f(x + t\xi) - f(x) - t\langle z, \xi \rangle\}; \forall t > 0, \forall \xi \epsilon \mathrm{E}.$$

If these function slice convergence (as ($t \to 0$) to some function $\varphi \in \Gamma(E)$ then we say that f is twice slice- differentiable at x relative to z ,and φ is called the second order slice derivatives of f at x relative to z . we then write $f''_{x,z}$ instead of φ .

Proposition:

let f be twice slice- differentiable at x relative to z ,then:

(i) $f''_{x,z}$ is positively homogeneous of degree 2 .

(ii) $f''_{x,z}(0) = 0$.

Proposition:

let f be twice slice- differentiable at x relative to z ,then $z \in \partial f(x)$,Furthermore one has : $f''_{x,z}(\xi) \geq 0$: $\forall \xi \epsilon E$, $0 = \min_{\xi \epsilon E}\{f''_{x,z}(\xi)\}$,

$$0 \in \partial f''_{x,z}(0) \text{ .}$$

Proposition:

Let $f: E \mapsto \mathbb{R}$ be twice Frechet- differentiable in a neighborhood of x , then f is twice slice- differentiable at x relative to $Df(x)$ with :

$$f''_{x,z}(\xi) = \frac{1}{2}\langle D^2 f(x)\xi, \xi \rangle$$

Where $D^2 f(x)\xi$ is the second order Frechet derivatives of f .

Theorem (Conjugacy):

(a) $z \in \partial f(x) \Leftrightarrow x \in \partial f^*(z)$

(b) $(\Lambda_t^2 f)^*_{x,z} = (\Lambda_t^2 f^*)_{z,x}$

(c) f be twice slice- differentiable at x relative to z if and only if f^* is twice

slice- differentiable at z relative to x . More precisely ,

$$(f''_{x,z})^* = (f^*)''_{z,x}$$

Proposition:

Let X, E be normed spaces , let $A: X \to E$ be a linear isomorphism mapping , and $f \in \Gamma(E)$, $f: E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ let $x \in X$,and suppose $\partial f(Ax) \neq \phi$,also let $z \in \partial f(Ax)$ Then

1) The linear continues function $A^* z$ from X^* which defined as :

$$\langle A^* z, \xi \rangle = \langle z, A\xi \rangle$$

Is a linear continues function from $\partial(f \circ A)(x)$

2) if f is twice slice- differentiable at Ax relative to z , then foA is a twice slice- differentiable at x relative to $A^* z$ with :

$$(f \circ A)''_{x,A^* z}(\xi) = f''_{Ax,z}(A\xi)$$

Proposition:

Let f be ones and twice slice- differentiable at x relative to z ,Let $\xi \in E$ such that $f''_{x,z}(\xi) < +\infty$ then

1) $$f_x'(\xi) = \langle z, \xi \rangle$$

2) $$f''_{x,z}(\xi) = \begin{cases} \tau_s - \lim_{t \downarrow 0} \left[\frac{f(x+t\xi) - f(x) - tf_x'(\xi)}{t^2} \right] & if \langle z, \xi \rangle = f_x'(\xi) \\ +\infty & if \langle z, \xi \rangle < f_x'(\xi) \end{cases}$$

Chapter 4

Multifunctions derivatives

Throughout this section , F, E are normed spaces, $\gamma: E \rightrightarrows F$ is a Multifunctions

Let $x \in E$ and $z \in \gamma(x)$.

Definition: (*proto – derivative*)

let us consider the first order difference quotient multifunctions :

$$(\Delta_t \gamma)_{x,z}(\xi) = \frac{1}{t}\{\gamma(x + t\xi) - z\}; \forall t > 0, \forall \xi \epsilon \mathrm{E}$$

If the graph of $(\Delta_t \gamma)_{x,z}$ as a family of subsets of $E \times F$ convergense in strong Kuratowski sense (as ($t \to 0$)) to another subset of $E \times F$ then γ is said to be

Proto- differentiable at x relative to z , and the limit set is the graph of another multifunction $\gamma'_{x,z} : E \rightrightarrows F$ which will be called the *Proto- derivative* of γ

at x relative to z .

Proposition:

Suppose E_1, E_2, F_1, F_2 are normed spaces , and

$$A = (A_1, A_2): E_1 \times F_1 \rightrightarrows E_2 \times F_2$$

Is a linear isomorphism mapping and $\gamma: E_1 \rightrightarrows F_1$ is a multifunction . Let

$A\gamma : E_2 \rightrightarrows F_2$ be the multifunction defined by

$$gph(A\gamma) = A[gph(\gamma)]$$

Assume $\gamma(x) \neq \emptyset$,and $z \in \gamma(x)$. Then γ is *Proto- differentiable* at x relative to z if and only if $A\gamma$ is *Proto- differentiable* at $A_1(x,z)$ relative to $A_2(x,z)$.

One has : $$A\gamma'_{x,z} = (A\gamma)'_{A_1(x,z), A_2(x,z)} \quad .$$

Proposition:

Let $\gamma: E \rightrightarrows F$. Suppose $\gamma(x) \neq \emptyset$ and $z \in \gamma(x)$. Then γ is *Proto- differentiable* at x relative to z if and only if γ^{-1} is *Proto- differentiable* at z relative to x .

One has : $$(\gamma^{-1})'_{z,x} = (\gamma'_{x,z})^{-1}$$

Theorem :

Let E be a Banach space and $f \in \Gamma(E)$, $f: E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, let f be finit at $x \in E$ .and $z \in E^*$, Then the following are equivalent :

a) f is twice slice- differentiable at x relative to z .
b) $z \in \partial f(x)$, and ∂f is *Proto- differentiable* at x relative to z with the *Proto- derivative* being a subdifferential to another function $\varphi \in \Gamma(E)$ satisfies $\varphi(0) = 0$. one then has:

$$\partial(f''_{x,z}) = (\partial f)'_{x,z}$$

Proposition:

Let $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a convex function . Then f is twice Frechet- differentiable at x if and only if f is (once) Frechet- differentiable at x and twice slice- differentiable at x relative to $\nabla f(x)$. One then has

$$f''_{x,\nabla f(x)}(\xi) = \frac{1}{2}\langle \nabla^2 f(x)\xi, \xi\rangle$$

Chapter 5

Some Calculus

Proposition:

Let E be a normed space and $g \in \Gamma(E)$, $g: E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, Let $f: E \to \mathbb{R}$ is once and twice Frechet- differentiable at x , suppose g is once and twice slice- differentiable at x relative to $y \in E^*$, then the function $h = f + g$ is once and twice slice- differentiable at x relative to $z = Df(x) + y$,and

$$h'_x(\xi) = \langle Df(x), \xi\rangle + g'_x(\xi) , \forall \xi \in E$$
$$h''_{x,z}(\xi) = \frac{1}{2}\langle D^2 f(x)\xi, \xi\rangle + g''_{x,y}(\xi), \forall \xi \in E$$

Proposition:

Let H be a Hilbert space and $f \in \Gamma(E)$, $f: E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .Then :

1) For every $\lambda > 0$, The *Moreau-Yosida approximate*

$$f^{\lambda}(x) = \inf_{u\epsilon E}\left\{f(u) + \frac{1}{2\lambda}\|u - x\|^2\right\}, (x\epsilon E)$$

Is once Frechet- differentiable . The infimum above is always attained at unique point which will be denoted by $j_{\lambda}^{f}(x)$. The mapping j_{λ}^{f} is continuous in x and

$$\frac{1}{\lambda}\langle x - j_{\lambda}^{f}(x), .\rangle \in \partial f\left(j_{\lambda}^{f}(x)\right)$$

Moreover

$$Df^{\lambda}(x) = \frac{1}{\lambda}\langle x - j_{\lambda}^{f}(x), .\rangle$$

2) Suppose that f is twice slice- differentiable at $u = j_{\lambda}^{f}(x)$ relative to

$z = Df^{\lambda}(x) = \frac{1}{\lambda}\langle x - u, .\rangle$ .Then f^{λ} is twice slice- differentiable at x relative to z and

$$(f^{\lambda})''_{x,z} - (f''_{u,z})^{\lambda}$$

3) Under the same assuming as in (2) , The mapping j_{λ}^{f} is Proto - differentiable at x relative to $u = j_{\lambda}^{f}(x)$ and its Proto- derivative is given by

$$\left(j_{\lambda}^{f}\right)'_{x,u}(\xi) = arg\min_{\eta\in H}\{f''_{u,z}(\eta) + \frac{1}{2\lambda}\|\xi - \eta\|^2\}$$

In addition , $\left(j_{\lambda}^{f}\right)'_{x,u}$ is a positively homogeneous of degree 2 .

Proposition:

Let C be a nonempty closed convex set in a Hilbert space H . Let $P = P_C$ be the projection map on C . Let $x \in H$ and suppose that δ_C is twice slice-differentiable at $P(x) = u$ relative to $z = \langle x - u, .\rangle$,Then P is Proto - differentiable at x relative to u and $p'_{x,u}$ will be positively homogeneous of degree 2 with :

$$p'_{x,u}(\xi) = arg\min_{\eta\in H}\{(\delta_C)''_{u,z}(\eta) + \frac{1}{2\lambda}\|\xi - \eta\|^2\}$$

Proposition:

Let C be a nonempty closed convex set in a Hilbert space H , Let $\varphi \in \Gamma(H)$ and suppose that φ is continuous at some point of C with $\partial\varphi(\eta) \neq \emptyset$ for all $\eta \in C$.

Define

$$P(\xi) = arg\min_{\eta\in C}\{\varphi(\eta) + \frac{1}{2}\|\xi - \eta\|^2\};\forall\xi \in H.$$

Then $P(\xi)$ is single valued for every ξ and the map P is onto C and continuous .

So if P is linear , Then C is a linear subspace .

المراجع الاجنبية

[1] *Attouch. H* :Variational convergence for functions and operators ,Pitman ,New York,1984.

[2] *Attouch. H* : *G, Buttazzo ; G , Michaille* : Maitrise de mathematique maitrrise mim , Universite Montpeller II .

[3] *Attouch .H* : *G ,Beer* . On the convergence of subdifferentials of convex functions, Arch . Math .Vol .60,389-400(1993).

[4] *Beer.G* : The slice convergence : a viable alternative to Mosco convergence in nonreflexive spaces.sém. d'Anal.Convexe Montpellier , exposer n° 3, 19(1992), 271-290.

[5] *BEER .G* . The slice topology : Aviable alternative to Mosco convergence in nonreflexive spaces , J .nonlinear Anal , to appear (1991).

[6] *Cominetti .R* : On Pseudo-differentability. Trans. Amer. Math. Soc., 322 (1996).

[7] *DO ,N.C* : " Generalized Second derivatives of convex functions in reflexive Banach spaces ," Transactions Amer . Math. Soc .To appear.

[8] *Hiriart ,B .G –Urtuty*: The approximate first -ordre and second-order direction derivatives for convex function ,Mathematical theories of Optimization, Lecture Notes in Math., 979(1983), 144-177.

[9] *JAHN .J* : Introduction to the theory of nonlinear optimization ,Springer – Verlag , Berlin Heidelberg ,1994,1996 .

[10] *PHELPS .R* :Convex functions ,Monoton operators ,And differentiability ,Lecture notes in mathematics # 1364 ,Springer – Verlag ,Berlin ,1989 .

[11] *Rockafellar .R* : First and second order pseudo-differentiability in nonlinear programming , Trans . Amer . Math. Soc . 307 (1988) , 75-108 .

[12] *Rockafellar .R* : "Second-order optimality conditions in nonlinear programming obtained by way of epi-derivatives ,"Math. Of Oper. Research 14 (1989),462-484.

[13] *Rockafellar .R* : " Generalized second derivatives of convex functions and saddle functions ,"Transactions Amer . Math. Soc.320 (1990) ,810-822.

[14] *Rockafellar .R* : Second-Order Variational Analysis and Bedond . Conférence sur l'Analyse Variationelle et l'Optimisation, Université de Montpellier II, France, 9-12 Septembre,2009.

[15] *Seeger .A* : Second order directional derivatives in parametric optimization Problems ,preprint .MR 931491 (89d:90217).

[16] *Soueycatt. M* : On second-order epi-derivativse in terms of $\rho-$Housdoroff distance. Mu'tah Lil-Buhuth Wad-Dirasat, to appear (2010).

المراجع العربية

[17] المدخل إلى التحليل الدالي وتطبيقاته,ترجمة الدكتور خضر حامد الأحمد من منشورات جامعة دمشق